III. — Application des progressions a des formules DE MESURES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

6. Dans le diagramme représentant une « courbe de progression géométrique » on pourra insérer un nombre quelconque de moyens géométriques. Si la courbe est simplement dessinée par l'élève à main levée, les moyens mesurés sur le diagramme ne seront naturellement qu'approximatifs. Mais, pour rendre la construction exacte, une simple règle ayant la forme d'une telle courbe suffira et permettra de résoudre des problèmes de ce genre.

III. — Application des progressions a des formules de mesures.

Il ne semble pas que le fait suivant soit généralement connu, à savoir que la formule donnant la somme d'une série géométrique puisse être utilisée pour le calcul des aires, des volumes de révolution, des coordonnées de centres de gravité, de centres de pression ou des moments d'inertie dépendant d'intégrales de puissances de la variable. Ainsi le volume et le centre de gravité d'une pyramide, d'un cône ou d'un paraboloïde, ou bien les coordonnées du centre de pression d'un triangle ou d'une parabole, sont des exemples pouvant être traités par cette méthode. Prenons un exemple suffisamment difficile pour pouvoir servir de type ; le maître n'aura qu'à s'y référer pour les applications analogues.

Exemple : Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe $a\,y = x^2$ autour de l'axe des x, entre $x = o$ et $x = h$.

Divisons le volume en tranches par des plans dont les distances à l'origine forment une progression géométrique de raison r, un peu inférieure à 1.

Les distances de ces plans à l'origine, en y comprenant la base elle-même, seront

$$h,\quad rh,\quad r^2h,\quad r^3h,\ldots..$$

Les rayons des sections correspondantes sont

$$\frac{h^2}{a}\quad \frac{r^2h^2}{a}\quad \frac{r^4h^2}{a}\quad \frac{r^6h^2}{a}\ldots..$$

Les épaisseurs des tranches successives sont

$$(1-r)h\ ,\quad (r-r^2)h\ ,\quad (r^2-r^3)h\ ,\ldots\ldots$$

Les surfaces de leurs plus grandes faces sont

$$\frac{\pi h^4}{a^2}\ ,\quad \frac{\pi r^4 h^4}{a^2}\ ,\quad \frac{\pi r^8 h^4}{a^2}\ \ldots\ldots$$

Les surfaces de leurs plus petites faces sont

$$\frac{\pi r^4 h^4}{a^2}\ ,\quad \frac{\pi r^8 h^4}{a^2}\ ,\quad \frac{\pi r^{12} h^4}{a^2}\ \ldots\ldots$$

Le volume du solide est compris entre la somme des produits des plus grandes faces des éléments par leurs épaisseurs et celle des produits des plus petites faces des éléments par leurs épaisseurs, c'est-à-dire entre

$$\frac{\pi h^5}{a^2}\quad (1-r)\quad (1+r^5+r^{10}+\cdots\cdot)\ ,$$

et

$$\frac{\pi h^5}{a^2}\quad (1-r)\quad (r^4+r^9+r^{14}+\cdots\cdot)\ ,$$

ou entre

$$\frac{\pi h^5\,(1-r)}{a^2\,(1-r^5)}\quad \text{et}\quad \frac{\pi h^5 r^4\,(1-r)}{a^2\,(1-r^5)}\ ,$$

ou encore entre

$$\frac{\pi h^5}{a^2\,(1+r+r^2+r^3+r^4)}\quad \text{et}\quad \frac{\pi h^5 r^4}{a^2\,(1+r+r^2+r^3+r^4)}$$

Pour $r=1$ les deux expressions donnent la même valeur limite $\pi h^5 : 5a^2$ pour le volume demandé. Le volume est donc le $^1/_5$ du produit de la base par la hauteur.

Le trait essentiel de cette méthode réside dans le fait qu'au lieu d'avoir des sections équidistantes, les distances de ces sections à l'origine forment une progression géométrique dont la raison est un peu inférieure à l'unité. Par suite, la sommation est effectuée au moyen de la formule des progressions géométriques, tandis que, dans le cas de sections équidistantes, nous serions obligés d'avoir recours à des formules séparées concernant les sommes des carrés, cubes et autres puissances des nombres naturels. Le fait que nous avons le droit de choisir $r < 1$ et de passer ensuite au cas limite où $r = 1$ se justifie par des diagrammes bien construits; on verra que les quantités dont on doit faire la somme restent finies dans tous les cas où cette méthode est applicable.

Comme *autre exemple* de l'usage des progressions, on pourra appliquer avantageusement les propriétés de la « courbe de progression géométrique », qui est identique à la courbe logarithmique, à la démonstration des formules de différentiation et d'intégration concernant les fonctions exponentielles et logarithmiques. La figure, examinée au point de vue géométrique, nous fournit une démonstration rapide du fait que la limite dont dépendent ces différentiations et intégrations, c'est-à-dire la limite de $\frac{(a^h - 1)}{h}$ lorsque $h = o$, est finie et possède les propriétés du logarithme de a, et que la base de ce système de logarithmes est un nombre fini e plus grand que l'unité pouvant être estimé approximativement en le mesurant sur le diagramme.

G.-H. Bryan (Bangor, N. Wales).

Note. — Le nom de « progression » est donné dans les anciens manuels anglais aux séries arithmétiques et géométriques et est utilisé dans le sens que nous lui avons attribué ci-dessus. La seule autre série à laquelle on donne généralement ce nom est la progression harmonique. Comme cette progression est habituellement étudiée en même temps que ses applications géométriques, nous n'en avons pas parlé ici.

(Traduction de J.-P. Dumur, Genève.)