Sur le principe d'induction complète.

coordonnées; il fonctionne alors comme *tachygraphe.* C'est un *tachygraphe accidentel,* s'il peut être défini indépendamment des coordonnées; il est au contraire *essentiel,* si une telle définition absolue n'est pas possible.

Les opérateurs $\nabla.$, $\nabla\times$ de Gibbs (Note III, n. 17) sont des opérateurs absolus, car la div et la rot peuvent être définies sans les coordonnées [*Elementi,* pp. 66-71; *Omografie vettoriali,* pp. 56-60]; ∇, au contraire, est un *tachygraphe essentiel* et le signe $\cdot$, ou $\times$, qui le suit, est un opérateur, qui, sans les coordonnées, n'a plus de valeur. La même chose a lieu pour **u** grad, qui n'a rien à voir avec la fonction grad [*Omografie vettoriali,* p. 51], et dans lequel grad figure pour une analogie cartésienne tout à fait accidentelle; et aussi pour Δ et Δ', comme nous avons déjà observé dans notre réponse aux observations de M. Timerding (n. 3)[1].

Après avoir rappelé tout cela, il nous faut observer que si Δ, dans certaines formules, suit les mêmes lois que des vecteurs, ce n'est pas une raison pour justifier la dénomination de *vecteur symbolique;* car la qualité d'être symbolique ne peut pas détruire l'autre d'être vecteur et ∇ n'est pas un vecteur, c'est un *tachygraphe.* Et si M. Wilson se fût donné la peine de lire ce que nous avons écrit au n° 17 de notre Note III, à propos des notations de Gibbs, il n'aurait pas écrit *que notre affirmation est fausse.*

En conclusion, peut-on admettre, dans les mathématiques, un même nom, un même signe, pour indiquer deux choses différentes? Nous ne le croyons pas; par conséquent nous n'avons pas suivi et nous ne suivrons jamais cette voie, qui conduit inévitablement à faire des confusions.

Août 1909. C. Burali-Forti et R. Marcolongo.

Sur le principe d'induction complète.

On reste, semble-t-il, encore indécis sur le rôle à attribuer, en Arithmétique, au principe d'induction complète. Ce principe ne serait-il pas tout bonnement, selon l'expression de M. Poincaré, une *définition déguisée?*

Si l'on admet qu'une théorie purement rationnelle doit se rapporter aux concepts les plus généraux possédant les propriétés dont elle s'occupe, le véritable objet de l'Arithmétique est l'étude de certains *types ordinaux* et, en premier lieu, du type ordinal auquel appartient la suite des nombres naturels et que G. Cantor

[1] La tachygraphie cartésienne ne peut se passer de tels *pseudo-opérateurs* vectoriels.

M. Klein [*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus,* cours autographié, t. II, pp. 42-139] expose, en la simplifiant, la premiere méthode analytique de Grassmann.

Il est bien connu que M Peano [*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann,* ecc., Torino, Fratelli Bocca, 1888] a, depuis longtemps, réduit à une forme absolue les formations de Grassmann; mais M Klein ne fait pas même allusion à ce livre!

désigne par le symbole ω. Les axiomes de l'Arithmétique devraient alors constituer une définition de ce type ordinal, définition qui pourrait être énoncée ainsi :

Un ensemble M est ordonné suivant le type ordinal ω, s'il satisfait aux conditions suivantes :

1° il y a un premier terme a_0 ; 2° à chacun de ses éléments en correspond un autre qui le suit immédiatement ; 3° tout ensemble formé d'éléments de M qui contient a_0 et les suivants immédiats de ses propres éléments se confond avec M.

Ces trois propriétés ne sont autres que celles qu'expriment les axiomes habituels de l'Arithmétique. La troisième proposition équivaut au principe d'induction complète et elle est évidemment indispensable pour distinguer le type ordinal ω des autres types se rapportant également à des ensembles ayant un premier terme, pas de dernier et dans lesquels tout élément a un suivant immédiat ; tels sont les types des ensembles parfaitement ordonnés dépourvus de dernier terme et définissant des nombres ordinaux supérieurs à ω ; tels sont encore les types ordinaux représentés, selon la notation de G. Cantor, par des expressions de la forme :

$$\omega + {}^*\omega + \omega\,, \qquad \omega + ({}^*\omega + \omega)^{\mu}\nu_0 + ({}^*\omega + \omega)^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + {}^*\omega + \omega\,, \ \text{etc.}$$

Un tel ensemble ordonné M comprend en général plusieurs ensembles contenant chacun a_0 et les suivants de ses propres éléments. Parmi ces derniers ensembles, il y en a toujours un et un seul du type ordinal ω ; la condition 3° exprime qu'il se confond avec l'ensemble M lui-même et, par conséquent, que celui-ci est bien de ce type ordinal ω.

Examinons maintenant la définition des nombres entiers positifs ou *nombres cardinaux finis* selon G. Cantor. Ces nombres sont les nombres cardinaux que l'on obtient en partant de l'unité et en l'ajoutant à chacun des nombres déjà obtenus de cette manière. Mais, si cette définition paraît suffisamment claire et complète, ne serait-ce pas parce que l'esprit évoque implicitement la notion intuitive et déjà familière du type ordinal ω ? Dire que l'on obtient par le procédé indiqué *tous* les nombres cardinaux finis, cela n'équivaut-il pas précisément à dire que ces nombres forment un ensemble ordonné selon le type ω ? La définition explicite des nombres finis consisterait alors dans les trois propositions suivantes :

a) Le nombre cardinal 1 est fini ;

b) Si le nombre cardinal ν est fini, il en est de même du nombre cardinal $\nu + 1$ obtenu en ajoutant 1 à ν ;

c) Les nombres cardinaux finis ordonnés au moyen de l'opération $+ 1$ forment un ensemble ordonné suivant le type ω, c'est-à-dire satisfont au principe d'induction complète.

Ainsi, qu'il s'agisse des types ordinaux ou des nombres, le principe d'induction complète se présenterait comme un élément de définition et nullement comme un principe général de logique.

G. Combebiac (Montauban).

Comment une force agit-elle sur un corps?

On parle souvent d'une seule force, quand il s'agit en réalité d'un grand nombre de forces plus petites. Celui qui, au moyen d'une corde, veut entraîner un corps, saisit la corde en un grand nombre de points, et c'est le frottement qui empêche la corde d'échapper de la main. Ce frottement est né de la *pression* que la main exerce sur la corde.

La corde n'est pas attachée à un seul point du corps, mais à un nombre illimité de points. Si la corde est attachée à l'aide d'un nœud (ou si elle est épissée), c'est encore le frottement qui joue un rôle. La corde n'exerce pas sur le corps une force tractive, mais une *pression*.

Si un corps est mis en mouvement par une tige, passant à travers le corps et pourvue d'une clavette, alors, quand on tire la tige, celle-ci exercera une *pression* sur la clavette, qui à son tour exercera une *pression* sur le corps. Si la tige est filetée et munie d'un écrou, c'est l'écrou qui exerce une *pression* sur le corps, et la friction empêche que l'écrou ne tourne.

Le frottement lui-même n'est autre chose que la conséquence d'un grand nombre de *pressions*.

La manière dont les forces exercées par la main sont transmises par la corde ou la tige n'est pas connue. On suppose que chaque partie d'un corps exerce une force attractive sur les parties environnantes. Dès qu'une partie se déplace sous l'action d'une force extérieure, cette partie entraîne les parties environnantes qui, à leur tour, entraînent d'autres parties, etc. Cela ne se fait pas sans que la distance qu'il y a entre les différentes parties devienne plus grande ou plus petite (allongement longitudinal, compression latérale).

Ce qu'on nomme *tension* est la conséquence d'un changement de la force attractive que les éléments du corps exercent les uns sur les autres. Or M. Keller a montré (*Comptes rendus* du 9 nov. 1908, T. CXLVII, p. 853) que l'attraction de deux points matériels peut être considérée comme la conséquence d'une *pression*.

C'est donc toujours la *pression* qui joue un rôle, et on arrive à la conclusion que ce qu'on nomme des forces tractives n'existe pas. Il faut excepter la force musculaire, qui échappe encore aux considérations mathématiques.