

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES TRANSLATIONS  
**Autor:** Bichard, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11851>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR LES TRANSLATIONS

---

On peut étudier le groupe des translations en lui-même et sans faire intervenir d'autres mouvements, comme l'a fait M. BOURLET (*Nouv. Annales de Math.*, année 1905). Il faut alors admettre cet axiome : La résultante de deux translations ne dépend pas de l'ordre de composition.

Dans un exposé complet de la Géométrie on introduit d'autres mouvements. L'axiome précédent est inutile. J'indique ici une façon d'exposer les choses.

On peut définir le *mouvement* : « une *transformation* changeant une figure en une autre figure *égale* ». La notion de figures *égales* est alors regardée comme indéfinissable. On peut au contraire considérer le *mouvement* comme non définissable. On nomme alors figures *égales* deux figures « *transformables l'une dans l'autre par un mouvement* ». Admettons maintenant les *axiomes suivants* :

I. « Deux figures égales à une troisième sont égales entre elles » ou « La résultante [*le produit*] de deux mouvements est un mouvement » ou encore « Les mouvements forment un groupe ».

II. Un segment AB est égal à BA, un angle AOB est égal à BOA.

Ceci peut se démontrer. (Voir la *thèse* de M. GÉRARD, *au commencement*.) On l'admettra ici. On admettra aussi que si les points B et C sont respectivement sur les demi-droites AX et DY, et si  $AB = DC$ , le mouvement amenant AX sur DY amène aussi B sur C. Un axiome analogue sur les angles s'énoncera facilement.

III. Si on a un plan P, et dans ce plan une demi-droite OD, il existe un mouvement changeant OD en la demi-droite opposée OD' et changeant l'un dans l'autre chacun des deux demi-plans dans lesquels D'OD divise P.

IV. Soit AD une demi-droite, P un demi-plan limité par

AD, B un point de AD. Il existe un mouvement changeant A en B, n'altérant pas P, et amenant la demi-droite AD sur la demi-droite BD. On le nomme *translation*.

V. Il existe *une seule* translation amenant A en B. [Elle conserve donc *tous* les demi-plans passant par AB.]

VI. Les translations AB et BC faites successivement équivalent à la translation AC. [*Cet axiome équivaut au Postulatum d'Euclide.*]

Ces axiomes admis, je vais démontrer une suite de propositions. Toutefois, je ferai encore la *remarque suivante* :

VII. Les mouvements changent les droites en droites (car la figure égale à une droite est une droite ; si donc un mouvement change une demi-droite OA en une demi-droite OB, il changera la demi-droite opposée à OA en la demi-droite opposée à OB.

*Proposition I.* Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Soient les deux droites AOC, BOD qui se coupent en O. Je dis que  $\text{AOB} = \text{COD}$ . D'après l'axiome II, il existe un mouvement amenant OB sur OC et OC sur OB. D'après l'axiome VII, ce même mouvement amène OD sur OA et OA sur OD. Ce mouvement amène donc BOA sur COD donc  $\text{BOA} = \text{COD}$ . D'après l'axiome II,  $\text{BOA} = \text{AOB}$  donc  $\text{AOB} = \text{COD}$  (axiome I). C. Q. F. D.

[Cette démonstration est identique à celle donnée par M. HADAMARD.]

*Proposition II.* La transformation dont il est question dans l'axiome III, qui n'altère pas le plan P, et amène la demi-droite OD du plan P sur son prolongement, amène toute autre demi-droite OE située dans P et passant par O sur son prolongement.

En effet, les angles opposés par le sommet DOE, D'OE' étant égaux, il existe une transformation amenant OD sur OD' et OE sur OE'. C'est bien la transformation de l'axiome III. (*Demi-tour* autour du point O.)

*Proposition III.* Si une translation change A en C et B en D, les deux angles BAD et ADC (alternes internes) sont égaux.

Soit  $DY$  le prolongement de  $CD$ ,  $DZ$  celui de  $AD$ . La translation  $AC$  change la direction  $AB$  en la direction  $CD$ , puis la translation  $CD$  change la demi-droite  $CD$  en  $DY$ . Comme d'après l'axiome VI ces deux translations équivalent à la translation  $AD$ , cette dernière translation change la demi-droite  $AB$  en  $DY$ . Mais cette translation change  $AD$  en  $DZ$ , donc elle change l'angle  $BAD$  en  $YDZ$ ,  $BAD = YDZ$ , mais  $YDZ = ADC$  (opposés par le sommet), donc  $BAD = ADC$  (axiome I).  
C. Q. F. D.

*Proposition IV.*  $CD$  étant, comme dans ce qui précède, le transformé de  $AB$  par une translation, les deux triangles  $ABD$  et  $DCA$  sont égaux.

Faisons subir au triangle  $ACD$  un demi-tour autour de  $A$ , ce triangle viendra en  $AGF$ , de façon que  $GF = CD$  et par suite  $GF = AB$ , l'angle  $GFA$  sera égal à  $ADC$  et par suite à  $BAD$  (théorème précédent), de plus  $AF = AD$ .

La translation  $FA$  amènera  $F$  en  $A$ ,  $A$  en  $D$ ,  $G$  en  $B$  puisque  $FG = AB$  et que  $GFA = BAD$ . Le triangle  $ACD$  est donc ainsi transporté sur  $DBA$ .

*Proposition V.* Si la translation  $AC$  amène le segment  $AB$  sur  $CD$ , la translation  $AB$  amène le segment  $AC$  sur le segment  $BD$ .

Soit  $BT$  le prolongement de  $AB$ . Pour démontrer la proposition énoncée il suffit de faire voir : 1° que  $AC = BD$ , 2° que l'angle  $TBD$  est égal à l'angle  $BAC$ . [La proposition résultera alors de la deuxième partie de l'axiome II.]

D'abord l'égalité  $AC = BD$  résulte de l'égalité démontrée ci-dessus des deux triangles  $ABD$  et  $DCA$ .

Soit  $CX$  le prolongement de  $AC$ ,  $CH$  le prolongement de  $DC$ .

La translation  $AC$  amène l'angle  $BAC$  sur  $DCX$ , donc  $BAC = DCX$ .

$DCX$  et  $ACH$  sont égaux comme opposés par le sommet ; donc  $BAC = ACH$ , mais la superposition des triangles  $DCA$  et  $ABD$  amène  $DC$  sur  $AB$  et par suite  $CH$  sur  $BT$ , elle amène  $AC$  sur  $DB$ , donc elle amène l'angle  $ACH$  sur l'angle  $TBD$ , donc  $ACH = TBD$ , donc  $BAC$ , qui est égal à  $ACH$ , est aussi égal à  $TBD$ .

La proposition se trouve ainsi démontrée.

*Proposition VI.* Le produit de deux translations est indépendant de leur ordre : La translation AD est la résultante des translations AC et CD, c'est-à-dire AC et AB, car (proposition V) la translation AB et la translation CD n'en font qu'une.

La translation AD est aussi la résultante de AB et de AC, car AC amène B en D par hypothèse. Donc la résultante de AB et de AC est la même que celle de AC et de AB.

\*  
\*   \*  
\*

Ce qui précède permet de faire immédiatement la théorie des équipollences, puis toute la géométrie projective.

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est presque immédiat. La notion de produit interne peut être introduite sans difficulté. De là on passe à la trigonométrie.

Cette manière de traiter la Géométrie peut donc sembler plus simple, plus économique, pour ainsi dire, que la manière classique.

Je ne veux cependant pas trancher la question de la façon d'exposer la Géométrie. Dans une exposition, la nature des axiomes admis, l'ordre des propositions me paraissent chose secondaire. La Géométrie est et doit rester un modèle de logique, car c'est là la raison d'être de son enseignement, c'est la cause de sa valeur éducative. Des démonstrations bien faites, une distinction nette entre ce qui est raisonnement et ce qui ne l'est pas, voilà ce qui est essentiel. On ne doit pas décorer du nom de démonstration, un assemblage de phrases cachant des faits intuitifs. Si un exposé remplit ces conditions, il ne faussera pas l'esprit de l'élève. Il y a sans doute des modes d'exposition préférables à d'autres, mais tous ceux remplissant les conditions précédentes sont bons.

J. RICHARD (Dijon).

---