

# INSCRIPTIBILITE DES POLYGONES ARTICULÉS DANS UNE CIRCONFÉRENCE

Autor(en): **Padoa, Alessandro**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11853>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## INSCRIPTIBILITE DES POLYGONES ARTICULÉS DANS UNE CIRCONFÉRENCE

### *Méthode synthétique.*

STEINER, dans le premier de ses deux mémoires *Sur le maximum et le minimum des figures*<sup>1</sup>, dit :

« On peut suivre dans ces recherches une marche toute géométrique, en faisant varier le cercle ou ses éléments d'une manière continue ; on parviendra ainsi à se convaincre par l'intuition immédiate... par exemple... qu'il y a toujours un cercle dans lequel un polygone de côtés donnés peut être inscrit. »

Je doute que l'on parvienne à se *convaincre* par l'intuition immédiate de la *vérité* de cette proposition ; tout au plus on parviendra à *soupçonner* la *possibilité* que cette proposition soit vraie, ce qui est bien différent.

Par suite, dans la théorie de STEINER, malgré les considérations que je viens de transcrire, cette proposition joue le rôle d'un *postulat*.

Ici je *démontre* cette proposition dans le cas particulier du *quadrilatère* [1] ; après quoi je la *démontre en général* [3], pourvu qu'on admette... un autre *postulat* !<sup>2</sup>

Le voici :

POSTULAT. *Entre les polygones dont les côtés sont respectivement égaux à ceux d'un polygone donné, il y en a un (au moins) dont l'aire est maxima ; en d'autres termes :*

*un polygone quelconque étant donné, on peut l'articuler<sup>3</sup> de manière que son aire devienne maxima.*

C'est au lecteur à se prononcer entre mon postulat et celui de STEINER, et à dire lequel est plus proche des données de

<sup>1</sup> *Journal de Crelle*, t. XXIV, Berlin, 1842 ; voir p. 108.

<sup>2</sup> Naturellement, on pourrait se passer de tout postulat en invoquant le *principe de continuité* ; mais son application, en ce cas, n'est pas aussi simple qu'on pourrait d'abord le croire.

<sup>3</sup> C'est-à-dire : modifier l'ampleur de ses angles, en conservant la longueur de ses côtés.

l'intuition immédiate, et lequel est plus propre à être adopté dans un cours.

1. *Il est possible de construire un quadrilatère convexe, inscrit dans une circonférence, et ayant ses côtés respectivement égaux à ceux d'un quadrilatère donné; en d'autres termes : un quadrilatère quelconque étant donné, on peut l'articuler de manière qu'il devienne inscriptible.*

DÉMONSTRATION <sup>1</sup>. Nommons  $a$ ,  $c$  et  $b$ ,  $d$  les couples de côtés opposés dans le quadrilatère donné, de manière que

$$a \geq c \quad (1) \quad \text{et} \quad b \geq d \quad (2)$$

On construit à part le segment  $m$ , tel que

$$a : c = b : m \quad (3)$$

Sur une droite quelconque on place, en cet ordre, les points A, D, M, de manière que

$$AD = d \quad (4) \quad \text{et} \quad DM = m \quad (5)$$

On partage le segment AM dans le rapport  $a : c$ , en dedans par le point P en dehors par le point Q; on aura ainsi, en valeur et signe,

$$AP : PM = AQ : MQ = a : c \quad (6)$$

Soit C un point de la circonférence de diamètre PQ, tel que

$$DC = c \quad (7)$$

(Je démontrerai tout à l'heure que ce point *existe* et qu'il n'appartient pas à la droite AD.)

Si par D on trace la droite parallèle à MC, on coupera d'abord la droite AC et après on coupera une seconde fois la circonférence ADC, en un point B.

Le quadrilatère ABCD est convexe et inscrit dans une circonférence; pour démontrer que c'est précisément celui que

<sup>1</sup> La construction dont je me sers est à peu près celle qu'on trouve, par ex., dans les *Elementi di Geometria*, par A. SANNIA et E. D'OVIDIO, Napoli, Pellerano, 1895 (voir p. 321); mais l'existence, qui est essentielle pour nous, y est simplement affirmée et non pas démontrée.

l'on voulait, il faut démontrer seulement, en tenant compte de (4) et (7), que

$$AB = a \quad \text{et} \quad BC = b.$$

En conséquence de la construction, on a ces égalités entre les angles :

$$\begin{aligned} BCA &= BDA = DMC \\ ABC &= \pi - CDA = CDM \end{aligned}$$

et par suite les triangles ABC et CDM sont semblables ; d'où

$$AB : CD = BC : DM = AC : CM. \quad (8)$$

De (6) et du fait que C appartient à la circonférence de diamètre PQ, on déduit<sup>1</sup>

$$AC : CM = a : c;$$

donc (8) et (7) donnent

$$AB : c = a : c \quad \text{d'où} \quad AB = a$$

et (8) et (5)

$$BC : m = a : c \quad \text{d'où (3)} \quad BC = b.$$

Il reste à prouver que C existe et qu'il n'appartient pas à la droite AD ; pour cela il suffit de démontrer que

$$DP < c < DQ.$$

De (6) on tire

$$AM : PM = (a + c) : c$$

et de (3)

$$(a + c) : c = (b + m) : m; \quad (3')$$

donc

$$AM : PM = (b + m) : m,$$

et en vertu de (4) et (5)

$$(d + m) : PM = (b + m) : m$$

<sup>1</sup> C'est un fait connu. Pour le démontrer, il suffit de tracer par P la parallèle à CQ jusqu'à couper CA en U et le prolongement de CM en V.

On obtient :

$$UP : CQ = AP : AQ$$

et

$$PV : CQ = PM : MQ$$

d'où (6)

$$UP = PV.$$

Alors CP est hauteur et médiane du triangle UCV ; elle est donc aussi bissectrice, d'où

(6)

$$AC : CM = a : c.$$

d'où, d'après (2)

$$[(b + m) - (d + m)] : (m - PM) = (b + m) : m$$

c'est-à-dire, d'après (5) et (3')

$$(b - d) : DP = (a + c) : c. \quad (9)$$

D'une manière analogue, de (6) et (1) on tire

$$AM : MQ = (a - c) : c$$

et de (3) et (1)

$$(a - c) : c = (b - m) : m; \quad (3'')$$

donc

$$AM : MQ = (b - m) : m,$$

et en vertu de (4) et (5)

$$(d + m) : MQ = (b - m) : m,$$

d'où

$$[(b - m) + (d + m)] : (m + MQ) = (b - m) : m$$

c'est-à-dire d'après (5) et (3'')

$$(b + d) : DQ = (a - c) : c. \quad (10)$$

Mais dans le quadrilatère donné il faut que

$$b < a + c + d \quad \text{et} \quad a < b + c + d$$

d'où d'après (2) et (1)

$$b - d < a + c \quad \text{et} \quad a - c < b + d$$

et par suite de (9) et (10)

$$DP < c < DQ \quad \text{c. q. f. d.}$$

2. *Pour que l'aire d'un polygone soit maxima, entre celles des polygones dont les côtés sont respectivement égaux à ceux d'un polygone donné, il faut qu'il soit convexe et inscrit dans une circonférence.*

En d'autres termes :

*Pour que l'aire d'un polygone articulé soit maxima, il faut qu'il soit convexe et inscriptible.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que le polygone donné soit un *quadrilatère*<sup>1</sup>.

Soit donc  $P'$  un *quadrilatère*, convexe mais *non inscriptible*. Nous savons [1] qu'on peut l'articuler en manière qu'il devienne *inscriptible*; en ce moment, nous appellerons  $P$  le quadrilatère et  $\gamma$  la circonférence dans laquelle il est inscrit.

Si nous appuyons sur les côtés de  $P'$ , en dehors, les petits segments de cercle qui restent compris entre  $P$  et  $\gamma$ , nous obtiendrons une figure dont l'aire est moindre que celle du cercle renfermé par  $\gamma$ <sup>2</sup>; en retranchant de cette figure et de ce cercle les segments de cercle considérés, il s'ensuit que  $P' < P$ .

Maintenant, un *polygone quelconque* étant donné, mon *postulat* dit qu'on peut l'articuler de manière que son aire devienne *maxima*; en ce moment, appelons-le  $P$ .

Si  $A, B, C$  sont trois sommets consécutifs de  $P$  et si  $H$  est un *quelconque* de ses autres sommets, il faut que  $ABCH$  soit un *quadrilatère inscriptible*; car autrement (en articulant ce quadrilatère jusqu'à le rendre inscriptible, ce que nous savons toujours possible, et en conservant rigides les parties de  $P$  qui peuvent se trouver appuyées, en dehors, aux côtés  $AH$  et  $CH$  de  $ABCH$ ), on pourrait articuler  $P$  en *augmentant* son aire, ce qui serait contre l'hypothèse.

Par suite, tout sommet de  $P$  appartient à la circonférence déterminée par  $A, B, C$ ; c'est-à-dire  $P$  est *inscrit* dans une circonférence, ce qu'il fallait démontrer.

3. De la proposition [2] et de mon *postulat* on déduit immédiatement :

*Un polygone quelconque étant donné, on peut l'articuler de manière qu'il devienne inscriptible.*

ALESSANDRO PADOA (Gènes).

<sup>1</sup> Dans un autre article (« Une question de Maximum », *Nouv. Ann.*, déc. 1908), j'ai démontré cette proposition en me servant du *postulat* de STEINER, que je donne ici comme *théorème*. Sans répéter ce que j'ai dit (dans la note de cette proposition, dans l'article cité) pour démontrer qu'il suffit de considérer des *polygones convexes*, j'en donne ici une nouvelle démonstration en me servant de mon *postulat* et de la proposition 1) que je viens de démontrer.

<sup>2</sup> Cela en vertu d'une proposition très connue dont on peut donner une démonstration synthétique qui ne dépend pas du *postulat* en question (voir mon article cité).