UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DESCARTES

Autor(en): **Jaccottet, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11855

à R. Donc, un état de v étant choisi aussi grand que l'on veut, on peut aller assez loin dans la suite particulière d'équations considérées pour que ces équations n'aient pas de racines dont le module soit compris entre R et v. A ces équations s'applique le raisonnement habituel prouvant que $h = p$.

L. Leau (Paris).

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DESCARTES

La règle des signes, dite de *Descartes*, attribuée aussi à *Harriot*, peut être énoncée : *Le nombre* p *des racines positives, non nulles, d'un polynôme entier en* x, *à coefficients réels, est au plus égal au nombre* v *des variations de signe que présente la suite des coefficients; la différence* v — p *est toujours un nombre pair.*

Voici une démonstration basée sur les propriétés qui résultent de la continuité de la fonction entière.

Nous démontrons tout d'abord la seconde partie, $v - p$ est un nombre pair.

Il existe un nombre A tel que, pour tous les x supérieurs à A, le polynôme a le signe de son premier coefficient et un nombre positif ε tel que, pour tous les x positifs, inférieurs à ε, le polynôme a le signe du dernier coefficient. Les racines positives du polynôme sont comprises entre ε et A. En examinant les signes du polynôme pour $x = \varepsilon$ et $x = A$, on obtient la proposition suivante : Le nombre p des racines positives d'un polynôme entier en x à coefficients réels est *pair* ou *impair*, suivant que les coefficients extrêmes sont de *même* signe ou de signes *différents*.

Dans le premier cas, lorsque les coefficients extrêmes ont le même signe, le nombre v des variations de signe est pair, dans le second il est impair. Les deux nombres v et p étant ensemble pairs ou impairs, leur différence $v - p$ est toujours un nombre pair.

Pour démontrer la première partie du théorème, $p \leqq v$, considérons le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + \quad a_1 x^{n-1} + \quad a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + \quad a_n ,$$

$$f'(x) \equiv n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} .$$

Ces deux polynômes ont leurs coefficients de même rang aussi de même signe, sauf le dernier, qui, en général, n'a pas de correspondant dans $f'(x)$. La suite des coefficients de la dérivée présente donc un nombre de variations de signe égal ou inférieur d'une unité au nombre des variations du polynôme donné. Si l'on désigne par p' et v', généralement par $p^{(k)}$ et $v^{(k)}$, les nombres p et v concernant les dérivées $f'(x)$, respectivement $f^{(k)}(x)$, nous avons

$$(1) \qquad v' \leqq v ;$$

et, en vertu du théorème de Rolle,

$$(2) \qquad p' \geqq p - 1 .$$

Supposons que, contrairement au théorème de Descartes, on ait $p > v$. La différence $v - p$ étant un nombre pair, p ne peut être égal à $v + 1$, on doit avoir

$$(3) \qquad p \geqq v + 2 .$$

Il résulte des inégalités (1), (2) et (3)

$$p' \geqq v' + 1 , \qquad p' > v' .$$

Le théorème de Descartes serait ainsi en défaut pour la dérivée première.

Mais le raisonnement précédent s'appliquerait à cette dérivée première et l'on trouverait $p'' > v''$; le théorème serait aussi en défaut pour la dérivée seconde. Et ainsi de suite. Le théorème serait donc en défaut pour la dérivée d'ordre $(n-1)$,

$p^{(n-1)} > v^{(n-1)}$; et, comme la différence $p^{(n-1)} - v^{(n-1)}$ est un nombre pair, on aurait

$$p^{(n-1)} \geqq v^{(n-1)} + 2 .$$

Cette dérivée est un polynôme du 1[er] degré qui aurait au moins deux racines positives ! L'hypothèse $p > v$ est donc fausse et le théorème de Descartes démontré.

C. Jaccottet (Lausanne).

SUR UNE INTÉGRALE AUX DIFFÉRENCES

M. Markoff[1] détermine la valeur de l'intégrale aux différences finies

$$\sum_{(r)}^{(0 \dots \infty)} x^r \Phi(r)$$

dans le cas où $\Phi(r)$ est une fonction rationnelle et entière de r ; il l'obtient par l'application répétée, et quelque peu laborieuse, du procédé d'intégration finie par parties. Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode plus rapide, $\Phi(r)$ étant d'ailleurs supposé quelconque.

Posons

$$1 + x + \dots + x^n = \mathrm{H}_n \cdot$$

On a évidemment

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots n)} r(r-1) \dots (r-\rho+1) x^r = x^\rho \frac{d^\rho \mathrm{H}_n}{dx^\rho} , \quad \rho = (0, 1, 2, \dots)$$

et, si l'on multiplie les deux membres de l'identité par $\frac{1}{\rho!} \Delta^\rho \Phi(0)$

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots , n)} \binom{r}{\rho} x^r \Delta^\rho \Phi(0) = \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho \mathrm{H}_n}{dx^\rho} \Delta^\rho \Phi(0) .$$

[1] *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.