

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE INTÉGRALE AUX DIFFÉRENCES  
**Autor:** Broggi, Ugo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11856>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$p^{(n-1)} > v^{(n-1)}$ ; et, comme la différence  $p^{(n-1)} - v^{(n-1)}$  est un nombre pair, on aurait

$$p^{(n-1)} \geq v^{(n-1)} + 2.$$

Cette dérivée est un polynôme du 1<sup>er</sup> degré qui aurait au moins deux racines positives! L'hypothèse  $p > v$  est donc fausse et le théorème de Descartes démontré.

C. JACCOTTET (Lausanne).

## SUR UNE INTÉGRALE AUX DIFFÉRENCES

M. MARKOFF<sup>1</sup> détermine la valeur de l'intégrale aux différences finies

$$\sum_{(r)}^{(0 \dots \infty)} x^r \Phi(r)$$

dans le cas où  $\Phi(r)$  est une fonction rationnelle et entière de  $r$ ; il l'obtient par l'application répétée, et quelque peu laborieuse, du procédé d'intégration finie par parties. Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode plus rapide,  $\Phi(r)$  étant d'ailleurs supposé quelconque.

Posons

$$1 + x + \dots + x^n = H_n.$$

On a évidemment

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots, n)} r(r-1) \dots (r-\rho+1) x^r = x^\rho \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho}, \quad \rho = (0, 1, 2, \dots)$$

et, si l'on multiplie les deux membres de l'identité par  $\frac{1}{\rho!} \Delta^\rho \Phi(0)$

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots, n)} \binom{r}{\rho} x^r \Delta^\rho \Phi(0) = \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} \Delta^\rho \Phi(0).$$

<sup>1</sup> *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Or on sait, par le calcul des différences finies, que

$$\binom{r}{0} \Phi(0) + \binom{r}{1} \Delta \Phi(0) + \binom{r}{2} \Delta^2 \Phi(0) + \dots = \Phi(r) ;$$

en attribuant à  $\rho$  les valeurs 0, 1, 2, ... et en additionnant membre à membre, on obtient la relation cherchée

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots, n)} x^r \Phi(r) = \sum_{\rho}^{(0, 1, 2, \dots)} \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} \Delta^\rho \Phi(0) . \quad (1)$$

Il est aisé d'en déduire une autre, à laquelle M. STUDNICKA<sup>1</sup> parvient en opérant sur les symboles opératoires  $\Delta$  comme sur des quantités, et en supposant que

$$(1 + \Delta)^n \cdot f = f + n\Delta f + \binom{n}{2} \Delta^2 f + \dots$$

Il est superflu d'ajouter qu'un tel procédé, bien que probablement légitime, laisse beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur.

L'expression

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots, n)} \binom{r}{\rho} x^r = \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho}$$

donne pour  $x = 1$

$$\left( \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} \right)_{x=1} = \rho! \left\{ \binom{\rho}{\rho} + \binom{\rho+1}{\rho} + \dots + \binom{n}{\rho} \right\} = \rho! \binom{n+1}{\rho+1} .$$

La relation (1) devient pourtant, dans le cas considéré,

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \dots, n)} \Phi(r) = \sum_{(\rho)}^{(0, 1, \dots)} \binom{n+1}{\rho+1} \Delta^\rho \Phi(0) , \quad (2)$$

ce qui est bien la formule annoncée.

Supposons au contraire  $x < 1$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \frac{1}{1-x} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} = \frac{d^\rho}{dx^\rho} (\lim H_n) = \frac{\rho!}{(1-x)^{\rho+1}} .$$

<sup>1</sup> Prager Berichte, 1871.

et il résulte alors de (1), que

$$\sum_{(r)}^{(0,1,\dots,\infty)} x^r \Phi(r) = \frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^\rho \Delta^\rho \Phi(0) . \quad (3)$$

L'étude de la convergence de la série

$$\Phi(0) + x\Phi(1) + x^2\Phi(2) + \dots ,$$

considérée pour la première fois par ABEL, se rattache pour (3) à celle des différences de la fonction  $\Phi(r)$  au point  $r = 0$ .

Si l'on a  $|x| < \frac{1}{2}$ , il suffit de supposer que toutes les différences  $\Delta^\rho \Phi(0)$  soient finies pour que le deuxième membre de (3) converge. Car il est alors possible d'indiquer deux grandeurs finies M et N, telles que

$$|\Delta^\rho \Phi(0)| \leq M$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^\rho \Delta^\rho \Phi(0) &\leq \frac{M}{1-x} \sum_{(\rho)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^\rho \\ &= M \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \leq N . \end{aligned}$$

Il suffit même, pour assurer la convergence de la série considérée, d'exiger que, pour  $\lim \rho = \infty$ ,  $\Delta^\rho \Phi(0)$  ne devienne plus rapidement infinie que  $\left( \frac{1-x}{x} \right)^{\rho-1}$ .

Le contraire a lieu, au moins pour ce qui concerne la convergence absolue de la série, si  $|x| \geq \frac{1}{2}$ ; si l'on suppose que

$$\lim |\Delta^\rho \Phi(0)| \geq \eta > 0 .$$

où  $\eta$  est une grandeur finie quelconque, on a alors

$$\frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^\rho \left| \Delta^\rho \Phi(0) \right| \geq \frac{\eta}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^\rho > N ,$$

N étant une grandeur finie arbitrairement grande. Il est nécessaire de supposer ici que, pour  $\lim \rho = \infty$ ,  $\Delta^\rho \Phi(0)$  s'approche de zéro au moins aussi rapidement que  $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\rho+1}$ .

Ugo BROGGI (Buenos-Aires).

## SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES

1. — Les déterminants du type

$$(I) \quad \left| a_{ik,y}^{n-i} a_{ik,z}^i \right| = 0 \quad (i, k = 0, \dots, n)$$

où  $a_y, a_z$  sont des formes linéaires quaternaires, peuvent s'écrire en fonction des coordonnées plückériennes de la droite. On peut donc dire que (I) représente un complexe de droites d'ordre  $\frac{n(n+1)}{2}$ . De tels complexes ont été rencontrés par M. NEUBERG<sup>1</sup> et par nous<sup>2</sup>.

De même, l'évanouissement d'une matrice

$$(II) \quad \left\| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^i \right\| = 0 \quad (i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, n+1),$$

représente une congruence réglée dont nous allons déterminer l'ordre et la classe au moyen des méthodes de MM. GIAMBELLI<sup>3</sup> et STUYVAERT<sup>4</sup>.

2. — Pour trouver l'ordre  $\mu$ , supposons les  $y$  fixes dans la matrice (II). Cette matrice doit représenter un nombre fini de droites lorsqu'on considère les  $z$  comme les coordonnées courantes.

Supposons que le plan  $z_4 = 0$  n'est pas un plan singulier

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1902, II<sub>3</sub>.

<sup>2</sup> *Bul. de l'Acad. de Belgique*, 1907. — *N. A. M.* 1907, VII<sub>4</sub>. — *Mémoires de la Soc. des Sc. du Hainaut*, 1908, IX<sub>6</sub>.

<sup>3</sup> *Mém. Ist. Lomb.*, 1904. — XI<sub>3</sub>.

<sup>4</sup> *Mém. Soc. Sc. Liège*, 1908. — VII<sub>3</sub>.