Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

Autor: Combebiac, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12780

Du reste, je me propose, si mes loisirs me le permettent, d'emprunter quelque jour encore l'hospitalité bienveillante de cette revue pour faire connaître à ses lecteurs quelques-unes des méthodes du mathématicien belge et en particulier le procédé si inattendu des limites relatives.

J'ai la ferme conviction que son œuvre sera étudiée de plus en plus par ses contemporains et que les générations futures le désigneront comme un novateur et un protagoniste de la méthode vectorielle.

J. Rose (Chimay, Belgique).

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

(2me article.)[1]

La question des principes de la Géométrie (métrique) a été pleinement résolue par S. Lie, qui a déterminé les conditions auxquelles doit satisfaire un groupe continu de transformations pour définir une métrique euclidienne ou non-euclidienne. La condition essentielle est d'admettre un invariant binaire $J(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,)$.

Mais un tel groupe de transformations étant entièrement défini par son invariant, il y aurait évidemment économie logique à prendre pour objet des axiomes les fonctions numériques de deux points elles-mêmes. De plus, l'analogie serait ainsi complète avec l'idée de mesure telle qu'elle a été établie pour les continus à une dimension[1], enfin l'on éliminerait ainsi des principes de la géométrie la notion de groupe de transformations, bien complexe comme notion fondamentale, malgré le rôle prépondérant qu'elle joue en réalité au point de vue physique.

La propriété essentielle des *fonctions de distance* (j'adopterais aussi volontiers le terme de *fonctions métriques*) est

[1] Voir le 1er article de l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910; t. XII, p. 89-97.

connue depuis longtemps. Elle sert de base à un mémoire très remarqué de M. de Tilly[1]; mais il restait à décider, ainsi que le fait d'ailleurs observer cet auteur, si cette propriété suffit pour caractériser complètement les deux catégories de fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non-euclidiennes.

Les résultats obtenus par S. Lie permettent de résoudre complètement cette question, c'est-à-dire de déterminer les propriétés qui caractérisent les fonctions de distance. L'objet de cet article est de les mettre en lumière.

I

Soit J une fonction de deux points, que nous appellerons leur distance, pour simplifier le langage; nous supposons qu'un point quelconque M peut être déterminé par ses distances à trois points donnés A, B, C, pourvu que ces quatre points occupent des positions générales les uns par rapport aux autres; en d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque M doivent s'exprimer, *en général,* en fonction de ses distances aux points A, B, C et des coordonnées de ceux-ci, c'est-à-dire que le système d'équations

$$\begin{aligned}
J(x', y', z', x_1', y_1', z_1') &= J(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = k_1 \\
J(x', y', z', x_2', y_2', z_2') &= J(x, y, z, x_2, y_2, z_2) = k_2 \\
J(x', y', z', x_3', y_3', z_3') &= J(x, y, z, x_3, y_3, z_3) = k_3
\end{aligned}$$

admet, en général, une solution en x', y', z'.

On peut faire varier d'une manière continue les coordonnées des points A, B, C en laissant constantes leurs distances respectives. Les neuf coordonnées étant alors soumises à trois relations, la position du système des trois points dépend évidemment de six paramètres indépendants.

On peut faire participer au déplacement tous les points de l'espace en déterminant la position d'un point quelconque par la condition de conserver constantes ses distances aux

[1] R. de Tilly, *Essai de Géométrie générale.*

points A', B, C et par la continuité du déplacement. On obtient ainsi une série continue S de transformations définies par les équations précédentes, eu égard aux trois relations mentionnées entre les paramètres x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, x'_3, y'_3, z'_3.

Si J est l'invariant d'un groupe continu de transformations, ce groupe est nécessairement contenu dans la série S et, s'il n'admet pas d'autre invariant indépendant, on reconnait facilement qu'il se confond avec cette série, dont les transformations laissent alors constante la distance $M_1 M_2$ de deux points quelconques; autrement dit cette distance reste constante lorsque les coordonnées des points A, B, C, M_1 et M_2 varient d'une manière continue en laissant constantes les autres distances déterminées par ce système de cinq points. *La distance M_1 M_2 est donc, dans ce cas, déterminée en fonction des neuf autres.*

Réciproquement, si la distance $M_1 M_2$ possède cette dernière propriété, elle restera évidemment constante dans toutes les transformations de la série S. Celle-ci, se trouvant alors composée de toutes les transformations qui admettent un invariant, constitue un groupe. Comme celui-ci ne saurait admettre d'invariant indépendant de J et qu'il est d'ailleurs par hypothèse continu, il doit figurer parmi les groupes à invariant binaire et unique déterminés par S. Lie.

Comme les considérations précédentes s'étendent manifestement aux continus à un nombre quelconque de dimensions, les invariants de ces groupes sont bien caractérisés par la propriété essentielle des fonctions de distance, qui peut être énoncée de la manière suivante :

A) *Pour un continu à* n *dimensions, il existe une relation entre les valeurs que prend la fonction de distance pour les* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *couples formés par* n + 2 *points.*

La proposition A) constitue donc l'axiome essentiel de la Géométrie métrique et l'on reconnaît aussi, pour $n = 1$, la propriété fondamentale des métriques des continus à une dimension.

Pour ce dernier cas, l'on a pu déterminer l'expression générale des fonctions métriques et l'on a vu[1] qu'il était toujours possible, moyennant un choix convenable du système de coordonnées, de prendre la fonction sous la forme $x_2 - x$ ou [2], ce qui revient au même, $(x_2 - x_1)^2$. On connaît aussi les expressions générales des fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non euclidiennes pour les continus à plusieurs dimensions. Il reste à déterminer les propriétés qu'il faut adjoindre à celle qui est exprimée par la proposition A) pour caractériser ces fonctions.

§ II.

S. Lie a déterminé, pour les continus à deux et à trois dimensions, tous les groupes continus de transformations admettant des invariants binaires. Si l'on ne distingue pas le domaine réel du domaine imaginaire, les invariants de ces groupes, c'est-à-dire les fonctions de distance des métriques correspondantes, peuvent toujours, par un choix convenable des coordonnées, être mises sous l'une des formes suivantes :

Espace.

$$\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2} \tag{1}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{2}$$

$$z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - c \log(y_2 - y_1)^2 \tag{3}$$

$$z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)} \tag{4}$$

$$z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

$$z_2 - z_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 . \tag{6}$$

---

[1] G. Combebiac, *Pour une Théorie de la mesure*, 1er article, *L'Ens. math.*, p. 89-97.

[2] Il est à peine besoin d'indiquer que toutes les fonctions d'une fonction de distance définissent la même métrique.

PLAN.

$$(1)' \qquad \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}$$

$$(2)' \qquad \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^c}$$

$$(5)' \qquad (x_2 - x_1)\, e^{-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$(6)' \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2 \,.$$

Les métriques non euclidiennes (elliptiques ou hyperboliques) relèvent des expressions (1) et (1)'; les métriques euclidiennes relèvent, pour l'espace, de l'expression (2) et, pour le plan, de l'expression (2)', qui, pour $c = -1$ et en remplaçant en outre x et y respectivement par $x + yi$ et $x - yi$, devient en effet: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Les expressions (1) à (6) définissent aussi des fonctions de distance pour le plan des xy. Si l'on y fait en effet $z = 0$, les expressions (1) et (6) se réduisent à (1)' et à (6)'; (2) et (4) rentrent dans (2)', à laquelle devient équivalente (3); enfin, (5) devient équivalente à (5)'.

Observons aussi que les expressions (1) et (2) se réduisent à la même si l'on y annule les coordonnées y et z, ce qui montre bien que le classement des métriques en euclidiennes et non euclidiennes n'a aucun sens pour les continus à une dimension.

Les fonctions (3), (4), (5) et (6) présentent une particularité. Si J_1 et J_2 désignent les distances d'un point quelconque de coordonnées x, y, z à deux points fixes situés sur une même parallèle à l'axe des z, l'on a

$$J_2 = J_1 \pm (z_2 - z_1) \,.$$

C'est-à-dire que les deux fonctions J_1 et J_2 de x, y, z sont fonctions l'une de l'autre. Dans ce cas, le nombre des *pseudo-sphères* est ∞^3 au lieu de ∞^4, les points situés sur une même parallèle à l'axe des z étant les centres des mêmes pseudo-sphères.

Ainsi, pour l'espace, seules les fonctions (1) et (2) jouissent de la propriété négative suivante :

B) *Les distances d'un point variable d'une manière quelconque dans l'espace à deux points déterminés ne sont jamais fonctions l'une de l'autre.*

Les axiomes A) et B) caractérisent donc complètement les fonctions correspondant aux expressions (1) et (2). Il résulte d'ailleurs des travaux de S. Lie que ces conclusions s'étendent aux continus à n dimensions, pour $n > 3$, en substituant, bien entendu, aux expressions (1) et (2) les expressions correspondantes contenant $2n$ variables.

On peut enfin, parmi les métriques relevant des expressions (1) et (2), ne retenir que celles qui ont été généralement étudiées sous les dénominations d'euclidiennes et de non euclidiennes, en stipulant qu'*aucune pseudo-sphère ne doit passer par son centre,* ce qui implique, en particulier, que la surface représentée par l'équation

$$J(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = J(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)$$

ne doit pas avoir de nappe *réelle* passant par le point x_0, y_0, z_0. Si le système de coordonnées est cartésien ou seulement projectif, on écarte ainsi les métriques pour lesquelles les pseudo-sphères sont des surfaces du second ordre réglées, c'est-à-dire celles que l'on obtient en remplaçant, dans les expressions (1) et (2), une ou deux des coordonnées x et y par les imaginaires ix et iy.

La question posée est donc bien résolue pour les continus à plus de deux dimensions; si l'on s'en tient au point de vue analytique et que l'on ne fasse pas de distinction entre le domaine réel et le domaine imaginaire, l'on n'a bien à envisager que deux catégories de métriques caractérisées par les expressions (1) et (2).

La question n'est pas aussi simple pour les continus à deux dimensions. L'axiome B) élimine bien les métriques déterminées par l'expression (6)' et par l'expression (2)' pour $c = 1$; mais il laisse subsister d'autres métriques très différentes de celles qui ont fait jusqu'à présent l'objet d'études géométriques.

Pour $c \neq 1$, l'expression (2)′ donne lieu à des métriques dont les *pseudo-cercles*, si le système de coordonnées est cartésien, ont des formes se rapprochant plus ou moins de l'ensemble formé par deux hyperboles équilatères complémentaires (en prenant pour fonction de distance le carré de l'expression (2)′).

En remplaçant x et y respectivement par $x + yi$ et $x - yi$ et le paramètre c par un autre $b = 2i\frac{1-c}{1+c}$, il est facile de voir que l'on peut prendre la fonction de distance sous la forme

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\, e^{b \operatorname{arc\,tang} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

Si le nouveau système de coordonnées est cartésien, les pseudo-cercles sont des spirales s'enroulant dans un sens ou dans l'autre suivant que b est positif ou négatif et qui se réduisent à de vrais cercles pour $b = 0$ (métrique ordinaire).

Enfin, l'expression (5)′ interprétée en coordonnées cartésiennes donne lieu à des pseudo-cercles constitués par des courbes à branches infinies.

On ne poussera pas plus avant cette étude, dont le principal objet était de mettre en lumière la simplicité des principes sur lesquels on peut fonder à la fois la Géométrie et une théorie de la mesure.

Il faut reconnaître pourtant que, si ces principes sont simples, ils ne sont pas facilement maniables ; entre l'axiome réellement essentiel A) et les expressions (1) et (2), il y a les puissantes analyses de S. Lie et l'on n'aperçoit aucun moyen simple de déduire des axiomes, par exemple, les propriétés primordiales des lignes qui jouent dans les diverses métriques le rôle des lignes droites. La même observation s'appliquerait d'ailleurs aux axiomes de Lie, les deux points de vue étant intimement liés. Voici en effet comment la question se pose.

La définition habituelle de la ligne droite est celle-ci : ensemble des points qui restent fixes dans tous les déplacements sans déformation laissant fixes deux points déterminés M_1 et M_2. Mais cette définition est fort médiocre au point de vue analytique, car les déplacements qui laissent fixes les points d'une droite, laissent également fixes tous les points (imaginaires il est vrai) des deux plans isotropes qui passent par cette droite. De plus, la définition n'est pas valable pour le plan: Il conviendrait évidemment d'adopter une définition d'un caractère plus général et s'appliquant également au domaine réel et au domaine imaginaire. Cette définition pourrait être la suivante : l'ensemble des points (x, y, z) tels que les deux pseudo-sphères passant par un de ces points et ayant pour centres les points M_1 et M_2 aient un élément superficiel commun. Il est facile de voir que les équations de la ligne ainsi définie sont :

$$\frac{dJ_1}{dx} : \frac{dJ_1}{dy} : \frac{dJ_1}{dz} = \frac{dJ_2}{dx} : \frac{dJ_2}{dy} : \frac{dJ_2}{dz},$$

en désignant par J_1 et J_2 les distances du point (x, y, z) aux points M_1 et M_2.

Mais de cette définition on ne peut déduire que la ligne passe par les deux points M_1 et M_2 ni que chacune des lignes ainsi définies est déterminée par deux quelconques de ses points, c'est-à-dire que cette détermination dépend de quatre paramètres. Cette dernière propriété est d'ailleurs intimement liée à celle-ci : trois sphères dont les centres sont en ligne droite et qui ont un point commun passent par le même cercle, proposition qui peut se traduire dans le langage des fonctions de distance de la manière suivante : il existe une relation entre les distances d'un point variant d'une manière quelconque dans l'espace à trois points en ligne droite. Cette propriété s'exprime évidemment, en désignant par J_1, J_2 et J_3 les trois distances, par l'égalité suivante, qui doit être satisfaite pour toute les valeurs des variables x, y, z.

$$\begin{vmatrix} \frac{dJ_1}{dx} & \frac{dJ_1}{dy} & \frac{dJ_1}{dz} \\ \frac{dJ_2}{dx} & \frac{dJ_2}{dy} & \frac{dJ_2}{dz} \\ \frac{dJ_3}{dx} & \frac{dJ_3}{dy} & \frac{dJ_3}{dz} \end{vmatrix} = 0 .$$

On voit que ce n'est pas sans quelques difficultés que l'on pourra parvenir à établir une Géométrie rationnelle sur la seule notion de distance; mais quelle clarté pour ses fondements en comparaison de l'édifice lourdement artificiel que constitue le système des axiomes de caractère purement logique?

En terminant, je signale que l'axiome A), appliqué au plan, permet d'établir avec la plus grande simplicité la notion d'égalité des angles ainsi que les cas d'égalité des triangles, à condition toutefois que l'on ait pu, au préalable, établir que la fonction de distance détermine une métrique sur les lignes droites[1]. On voit que l'on est toujours ramené à édifier une théorie des lignes droites en fonction de la notion de distance.

G. COMBEBIAC (Montauban).

Appendice : Sur le Nombre irrationnel.

Dans mon premier article au sujet de la mesure, publié dans le numéro de mars de l'*Enseignement mathématique*, j'ai émis l'opinion que l'on pourrait se passer de la notion de nombre irrationnel dans toutes les applications des Mathématiques. Je dois reconnaître que l'expression a dépassé ma pensée.

Ce qui paraît incontestable, c'est que cette notion ne saurait être rattachée, pas plus historiquement que logiquement, à celle de mesure, car ce qui est naturel, c'est précisément d'admettre que toutes les grandeurs de même espèce sont commensurables deux à deux, conception qui suffit parfaitement tant que l'on se borne à mettre en œuvre leur mesure. Si le nombre irrationnel s'est imposé avant qu'il en eût été donné une définition correcte, c'est évidemment en Géométrie avec certains rapports dans la détermination desquels interviennent d'autres notions que celle de mesure, notamment la notion de fonction.

La nécessité (ou, ce qui revient au même, la convenance) de l'emploi du nombre irrationnel dans le domaine physique, paraît plutôt devoir être recherchée dans l'idée de continuité, non pas des ensembles, mais des fonctions. L'intuition expérimentale

[1] La fonction J détermine évidemment une métrique sur chacune des pseudo-sphères et sur chacun des pseudo-cercles; il suffit, pour le voir, d'appliquer l'axiome A) à cinq points, savoir: pour la pseudo-sphère, le centre et quatre points quelconques de la surface; pour le pseudo-cercle, les centres de deux pseudo-sphères contenant la courbe et trois points quelconques de celle-ci.

exige, en effet, qu'une fonction continue définie physiquement prenne, dans un intervalle quelconque, toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes, propriété qui appartient bien aux fonctions appelées continues par les mathématiciens. Rien n'empêche d'ailleurs, comme on sait, d'étendre cette dernière notion aux champs purement rationnels (la définition peut en effet se résumer dans la formule :

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a) \ ;$$

mais alors la propriété énoncée ne subsiste pas ; c'est ainsi que la fonction x^2 ne prend plus la valeur rationnelle 2. On est conduit à compléter le champ rationnel par tous ses points-limites, ce que n'exigeait à aucun degré l'idée seule de la mesure.

Il semble donc bien, en définitive, que ce soit dans l'idée de fonction continue, et non dans celle de mesure que l'on doit chercher la raison d'être du nombre irrationnel dans les applications des Mathématiques.

G. Combebiac (Montauban).

SUR LES DÉVELOPPÉES D'UNE COURBE GAUCHE[1]

Les propriétés connues des développées d'une même courbe gauche permettent de soupçonner que la recherche de toutes ces développées se ramène à l'étude d'une même équation différentielle dont il suffit de connaître une intégrale particulière, pour en trouver l'intégrale générale.

Effectivement, le problème se traduit par une équation de Ricatti ; mais un examen quelque peu attentif de cette équation permet d'en exprimer l'intégrale générale au moyen d'une quadrature.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point M, mobile sur une courbe donnée S, t l'angle que fait, avec

[1] La même question a été traitée, sous une forme toute différente, par M. Bianchi, dans le premier chapitre de son traité de Géométrie infinitésimale : le lecteur voudra bien, je l'espère, reconnaître que chacune des deux méthodes a son intérêt propre.