connue depuis longtemps. Elle sert de base à un mémoire très remarqué de M. de Tilly[1]; mais il restait à décider, ainsi que le fait d'ailleurs observer cet auteur, si cette propriété suffit pour caractériser complètement les deux catégories de fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non-euclidiennes.

Les résultats obtenus par S. Lie permettent de résoudre complètement cette question, c'est-à-dire de déterminer les propriétés qui caractérisent les fonctions de distance. L'objet de cet article est de les mettre en lumière.

I

Soit J une fonction de deux points, que nous appellerons leur distance, pour simplifier le langage; nous supposons qu'un point quelconque M peut être déterminé par ses distances à trois points donnés A, B, C, pourvu que ces quatre points occupent des positions générales les uns par rapport aux autres; en d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque M doivent s'exprimer, *en général*, en fonction de ses distances aux points A, B, C et des coordonnées de ceux-ci, c'est-à-dire que le système d'équations

$$\begin{aligned} J(x', y', z', x_1', y_1', z_1') &= J(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = k_1 \\ J(x', y', z', x_2', y_2', z_2') &= J(x, y, z, x_2, y_2, z_2) = k_2 \\ J(x', y', z', x_3', y_3', z_3') &= J(x, y, z, x_3, y_3, z_3) = k_3 \end{aligned}$$

admet, en général, une solution en x', y', z'.

On peut faire varier d'une manière continue les coordonnées des points A, B, C en laissant constantes leurs distances respectives. Les neuf coordonnées étant alors soumises à trois relations, la position du système des trois points dépend évidemment de six paramètres indépendants.

On peut faire participer au déplacement tous les points de l'espace en déterminant la position d'un point quelconque par la condition de conserver constantes ses distances aux

[1] R. de Tilly, *Essai de Géométrie générale.*

points A', B, C et par la continuité du déplacement. On obtient ainsi une série continue S de transformations définies par les équations précédentes, eu égard aux trois relations mentionnées entre les paramètres x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, x'_3, y'_3, z'_3.

Si J est l'invariant d'un groupe continu de transformations, ce groupe est nécessairement contenu dans la série S et, s'il n'admet pas d'autre invariant indépendant, on reconnait facilement qu'il se confond avec cette série, dont les transformations laissent alors constante la distance M_1M_2 de deux points quelconques; autrement dit cette distance reste constante lorsque les coordonnées des points A, B, C, M_1 et M_2 varient d'une manière continue en laissant constantes les autres distances déterminées par ce système de cinq points. *La distance M_1 M_2 est donc, dans ce cas, déterminée en fonction des neuf autres.*

Réciproquement, si la distance M_1M_2 possède cette dernière propriété, elle restera évidemment constante dans toutes les transformations de la série S. Celle-ci, se trouvant alors composée de toutes les transformations qui admettent un invariant, constitue un groupe. Comme celui-ci ne saurait admettre d'invariant indépendant de J et qu'il est d'ailleurs par hypothèse continu, il doit figurer parmi les groupes à invariant binaire et unique déterminés par S. Lie.

Comme les considérations précédentes s'étendent manifestement aux continus à un nombre quelconque de dimensions, les invariants de ces groupes sont bien caractérisés par la propriété essentielle des fonctions de distance, qui peut être énoncée de la manière suivante :

A) *Pour un continu à* n *dimensions, il existe une relation entre les valeurs que prend la fonction de distance pour les* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *couples formés par* n + 2 *points.*

La proposition A) constitue donc l'axiome essentiel de la Géométrie métrique et l'on reconnaît aussi, pour $n = 1$, la propriété fondamentale des métriques des continus à une dimension.

Pour ce dernier cas, l'on a pu déterminer l'expression générale des fonctions métriques et l'on a vu[1] qu'il était toujours possible, moyennant un choix convenable du système de coordonnées, de prendre la fonction sous la forme $x_2 - x$ ou [2], ce qui revient au même, $(x_2 - x_1)^2$. On connaît aussi les expressions générales des fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non euclidiennes pour les continus à plusieurs dimensions. Il reste à déterminer les propriétés qu'il faut adjoindre à celle qui est exprimée par la proposition A) pour caractériser ces fonctions.

§ II.

S. Lie a déterminé, pour les continus à deux et à trois dimensions, tous les groupes continus de transformations admettant des invariants binaires. Si l'on ne distingue pas le domaine réel du domaine imaginaire, les invariants de ces groupes, c'est-à-dire les fonctions de distance des métriques correspondantes, peuvent toujours, par un choix convenable des coordonnées, être mises sous l'une des formes suivantes :

Espace.

$$(1) \quad \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}$$

$$(2) \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$(3) \quad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - c\log(y_2 - y_1)^2$$

$$(4) \quad z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)}$$

$$(5) \quad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(6) \quad z_2 - z_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 \,.$$

[1] G. Combebiac, *Pour une Théorie de la mesure*, 1er article, *L'Ens. math.*, p. 89-97.
[2] Il est à peine besoin d'indiquer que toutes les fonctions d'une fonction de distance définissent la même métrique.