Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Kapitel: I

Autor: Turrière, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12782

tiques d'un système se projettent sur un plan donné suivant des circonférences concentriques, dépendent de cette équation ; ce théorème a été étendu par M. Buhl, dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique* de 1903, aux courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q},$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions linéaires de x et de y.

Outre l'intérêt de pure curiosité que peuvent présenter de tels résultats, il est possible de tirer profit de nombreux travaux relatifs aux équations de la Physique mathématique, d'utiliser, par exemple, les intégrales qui en ont été indiquées.

I

2. — Dans un de ses Mémoires, Bonnet annonça qu'il étudierait ultérieurement les surfaces qui admettent des hélices pour lignes asymptotiques; cependant aucun travail ne fut publié sur cette question importante et délicate, dont on ne connaît que de rares solutions (surface minima d'Enneper). — En observant que, si une hélice est une asymptotique d'une surface, cette courbe est une ligne de plus grande pente de la surface pour une orientation donnée, et que, réciproquement, si une asymptotique est ligne de plus grande pente d'une surface elle est aussi une hélice, j'ai été conduit à *déterminer les surfaces* (S) *dont les lignes de plus grande pente sont des asymptotiques.* Ces surfaces (S) présentent une particularité intéressante : les hélices qui constituent une famille d'asymptotiques ont toutes la même droite directrice.

Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et Oz, ce dernier étant vertical. Les équations respectives des lignes de plus grande pente et des asymptotiques étant

$$pdy - qdx = 0,$$

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

l'équation des surfaces (S) est

$$p^2r + 2pqs + q^2t = 0\;;$$

cette équation et l'équation

$$y^2r - 2xys + x^2t = 0$$

des surfaces dont les asymptotiques d'un système sont situées sur des cylindres de révolution autour de Oz, se correspondent par la transformation de Legendre. Il en résulte une propriété immédiate des développables circonscrites aux surfaces (S) le long des lignes de plus grande pente ; il en résulte aussi, ce qui nous intéresse davantage, que la *détermination des surfaces* (S) *est réductible à l'intégration de l'équation du mouvement de la chaleur*, en vertu du théorème de Bianchi.

3. — Considérons alors une surface quelconque, non développable, enveloppée par le plan

$$x \cos \varphi \cos \psi + y \cos \varphi \sin \psi + z \sin \varphi = \varpi\;;$$

ϖ désigne la distance de l'origine O au plan tangent ; c'est une fonction de la longitude ψ et de la latitude φ de l'image sphérique du point de contact, dans la représentation sphérique de Gauss.

Dans cette représentation tangentielle, l'équation différentielle des images sphériques des lignes de plus grande pente est

$$D' d\varphi + D'' d\psi = 0\,,$$

et celle des images des asymptotiques est

$$D d\varphi^2 + 2D' d\varphi d\psi + D'' d\psi^2 = 0\;;$$

D, D′ D″ sont les déterminants de Gauss (notations de Bianchi) ; leurs expressions sont

$$\begin{aligned} D &= \varpi + r\,, \\ D' &= q \operatorname{tg} \varphi + s\,, \\ D'' &= \varpi \cos^2 \varphi - p \sin \varphi \cos \varphi + t\,, \end{aligned}$$

p, q, r, s, t désignant les dérivées de ϖ par rapport à φ et à ψ.

En excluant le cas de dégénérescence tangentielle de la surface en une courbe, pour lequel $DD'' - D'^2$ est nul, on voit que les surfaces (S) sont caractérisées par l'équation $D'' = 0$. *Les images sphériques des asymptotiques qui sont lignes de plus grande pente sont les parallèles de la sphère.* En d'autres termes, en adoptant la dénomination de Minding, ces asymptotiques sont les parallèles de la surface (S).

L'équation $D'' = 0$ est une équation du second ordre qu'une transformation fort simple ramène à l'équation du mouvement de la chaleur. Posons en effet

$$u = \log(\operatorname{tg} \varphi), \quad \varpi = V \sin \varphi ;$$

D, D', D'' deviennent en général

$$D = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D' = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D'' = \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) ;$$

l'expression

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

qui figure dans D et D' n'est autre, d'ailleurs, que la cote du point de contact du plan avec la surface enveloppée. Sous la forme précédente, il est évident que l'équation $D'' = 0$ n'est autre que l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$$

du mouvement de la chaleur.

4. — Les surfaces (S) dépendant de l'équation du mouvement de la chaleur, on pourra leur appliquer des résultats connus et relatifs à cette équation célèbre.

On pourra définir ces surfaces par les formules

$$x = e^u \left[-\cos\psi \frac{\partial V}{\partial u} - \sin\psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$y = e^u \left[-\sin\psi \frac{\partial V}{\partial u} + \cos\psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

dans lesquelles V sera exprimée en fonction de ψ et de u par l'intermédiaire d'une intégrale définie : on prendra, par exemple, l'intégrale que donna Ampère

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \Theta(\psi + 2\lambda\sqrt{u})\, d\lambda,$$

ou celle

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\lambda) \cdot e^{i\lambda\psi - \lambda^2 u}\, d\lambda,$$

que considère M. H. Poincaré.

On pourra aussi prendre pour V un développement en série de la forme

$$V = U_1 + \frac{\psi - \psi_0}{1} U_2 + \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2\,!} U'_1 + \frac{(\psi - \psi_0)^3}{3\,!} U'_2 + \dots,$$

où U_1 et U_2 sont deux fonctions arbitraires de u, de dérivées U'_1, U'_2, ... ; un tel développement est convergent tant que u diffère de toute valeur qui soit singulière pour U_1 ou U_2. A ce développement contenant deux fonctions arbitraires, peut être subtitué un développement ne contenant qu'une fonction arbitraire Ψ de ψ :

$$V = \Psi + \frac{u - u_0}{1} \Psi'' + \frac{(u - u_0)^2}{2\,!} \Psi^{IV} + \dots;$$

cette solution, lorsque c'est une série convergente, est aussi générale que la précédente, d'après Poisson [1].

[1] Voir à ce sujet une courte note de M. Le Roux « *Sur les intégrales analytiques de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x} ».$$

(*Bulletin des Sciences Mathématiques* de M. Darboux, 1895, p. 127-128).

Comme application d'une autre nature, je citerai les formules de transformation à six constantes arbitraires données par M. Appell et qui laissent invariante l'équation du mouvement de la chaleur.

Laissant de côté ces applications de résultats relatifs à l'équation $r = q$, je choisirai parmi les solutions particulières connues

$$V = e^{a\psi + a^2 u}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\frac{\psi^2}{4u}}, \ldots,$$

la première de ces solutions : elle donne des résultats intéressants, relativement à des surfaces étudiées par M. Buhl, dans deux Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales* de 1908 et de 1909 [1].

II

5. Je considère donc la solution

$$V = e^{a\psi + a^2 u};$$

je poserai

$$a = \text{cotang}\, \alpha .$$

Les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de la surface (S) correspondante sont pour cette solution particulière :

$$\rho = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, e^{u}\, V, \; \theta = \psi - \alpha, \; z = \frac{V}{\sin^2\alpha};$$

il résulte de ces expressions que l'équation de la surface (S), en coordonnées cylindriques, est de la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(\rho)$$

en posant

$$\Phi(z) = (1 + a^2) \log z + \text{const}.,$$

$$F(\rho) = a^2 \log \rho;$$

[1] Je dois cependant signaler qu'à la solution $V = \psi$, correspond l'*hélicoïde gauche* à plan directeur, $\varpi = \psi \sin \varphi$, pour lequel les asymptotiques sont les parallèles $\psi =$ const. et les méridiens $\psi =$ const.