cas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas $a = \sqrt{2}.i$ correspond à l'une des surfaces de Bianchi : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'*équation des télégraphistes :* c'est le nom donné par MM. Poincaré, Picard et Boussinesq, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel V dans un fil ; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants A, B, C à l'unité. Posant alors

$$V = U \,.\, e^{-t},$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U ;$$

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction z dépendant de deux fonctions arbitraires de x et de deux fonctions arbitraires de y, c'est-à-dire à une fonction z intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

c'est là un type d'équations fréquent en Physique ; un changement bien simple de variables, mais qui introduit les imaginaires, ramène cette équation à celle qui se présente dans les vibrations des membranes

$$\Delta_2 U + U = 0 .$$

Il est préférable de ramener l'équation des télégraphistes à l'équation à invariants égaux et constants

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0 ;$$

cette dernière équation aux dérivées partielles, dont les rapports avec l'équation différentielle de Bessel sont bien connus, est un type auquel on peut réduire un grand nombre d'équations : je citerai les exemples suivants, empruntés à Ampère et Imschenetsky :

$$rx^2 + 2sx^2 + \left(x^2 - \frac{b^2}{q^2x^2}\right) t - 2x = 0 ,$$

$$r + 2qs + (q^2 - b^2) t = 0 ;$$

je citerai également l'équation remarquable

$$s^2 = 4pq ,$$

rencontrée par Craig dans des recherches géométriques, et que M. Goursat ramena ultérieurement à la forme $s = z$.

J'ai établi, dans un autre Mémoire [1], le théorème suivant : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies inclinées à 45° sur les méridiens, peut être ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* Ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème plus général concernant des loxodromies quelconques.

Considérons, en effet, les loxodromies

$$d\varphi = \operatorname{cotg} \alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos \varphi ,$$

[1] *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies.* (*Nouvelles Annales*, Janvier 1910.)

inclinées à α° sur les méridiens. L'équation des images sphériques des lignes de courbure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi \,.\, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi d\psi = 0 \,,$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$D'' - D\cos^2\varphi + 2\operatorname{cotg} 2\alpha\, D' \cos\varphi = 0 \,,$$

représente les surfaces (Σ) dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont les loxodromies.

$$d\varphi = -\operatorname{tg}\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,,$$
$$d\varphi = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,,$$

Introduisons alors l'argument τ des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = th\tau \,,\ \cos\varphi \,.\, ch\tau = 1 \,,\ \operatorname{tg}\varphi = sh\tau \,,$$

et prenons pour nouvelle fonction inconnue la fonction U de ψ et de τ définie par la relation

$$U = \varpi ch\tau \,.$$

Les déterminants D, D′, D″ de Gauss deviennent

$$D = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}\, ch\tau - \frac{\partial U}{\partial\tau}\, sh\tau \,,$$

$$D' = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} \,,$$

$$D'' = \left(U + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right)\frac{1}{ch\tau} - \frac{\partial U}{\partial\tau} \,.\, \frac{sh\tau}{ch^2\tau} \,;$$

l'équation considérée devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} + U + 2\operatorname{cotg} 2\alpha\, \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} = 0 \,.$$

Pour $\alpha = 45^\circ$, cette équation est identique à celle en laquelle M. Poincaré transforme l'équation des télégraphistes. C'est bien là le théorème que j'avais établi. Mais il suffit de poser

$$\tau = \frac{u+v}{\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \psi = \frac{v}{\sin^2\alpha} - \frac{u}{\cos^2\alpha},$$

pour transformer l'équation générale en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = U\,;$$

d'où résulte le théorème : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies est réductible à l'équation des télégraphistes.*

E. Turrière (Toulouse).

SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE

Dans l'enseignement élémentaire de la mécanique, on se contente le plus souvent d'une définition trop rapide de la puissance. Il conviendrait cependant d'insister sur cette notion, d'une grande l'importance pratique. Les élèves entendent parler, dans la vie courante, de *chevaux* ou de *watts* plus souvent que de *kilogrammètres* ou *d'ergs*[1]; il est donc utile de leur apprendre à appliquer les formules de mécanique à l'évaluation des nombres correspondants.

Je vais montrer rapidement ici comment on peut définir avec soin la notion de puissance et la faire avantageusement intervenir à côté de celle de travail élémentaire soit en statique soit en dynamique. Un très léger changement des équations (dérivées figurant à la place de différentielles) amène leurs différents termes à se prêter immédiatement au

[1] L'emploi fréquent de l'*hectowatt-heure* ou du *cheval-an* comme unités pratiques d'énergie est assez significatif au point de vue de l'importance industrielle respective des mesures de puissance et de travail.