Belgique. — M. A. Gob, professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liège, a été nommé membre de la Société royale des Sciences de Liège.

Danemark. — M. H. Heegard, professeur à l'Académie militaire, est nommé professeur à l'Université de Copenhague, en remplacement de M. le Professeur Zecthen, qui prendra sa retraite à la fin de cette année universitaire.

Etats-Unis. — M. Edw. Kasner a été promu professeur titulaire de Mathématiques à l'Université Columbia de New-York.

MM. W.-B. Carver, A. Ranum et F.-B. Sharpe ont été nommés professeurs adjoints à l'Université Cornell, Ithaca.

France. — L'*Association française pour l'avancement des Sciences* tiendra sa réunion annuelle à Toulouse, au mois d'août. La Section de Mathématiques et d'Astronomie sera présidée par M. E. Belot.

NOTES ET DOCUMENTS

ANGLETERRE

Enseignement de la géométrie et de l'algèbre graphique dans les écoles secondaires[1].

Les observations faites par les fonctionnaires du « Board of Education » sur l'enseignement de la géométrie dans les différentes écoles permettent de formuler des appréciations sur les résultats obtenus avec la nouvelle méthode d'enseignement. L'influence de la réforme est généralement bonne. Cependant, si la majorité des maîtres ne se sont pas suffisamment détachés de la tradition euclidienne en ce qu'elle a de fâcheux, quelques-uns ont été à l'opposé en sacrifiant complètement, en faveur des applications pratiques, l'enseignement de la méthode de déduction ; or, cette méthode devrait être l'élément essentiel de l'enseignement de la géométrie à l'école. Il reste beaucoup à faire pour obtenir partout les meilleurs résultats; cependant, on peut d'ores et déjà se féliciter de ce que la mémorisation inintelligente a disparu. Les connaissances des élèves sont souvent très limitées et il leur manque de la réflexion, mais la majorité d'entre eux comprennent ce qu'ils font.

La multiplicité des méthodes d'enseignement pour les mêmes sujets dans les diverses écoles facilite des comparaisons qui permettent de faire profiter les unes des expériences des autres. Ces différences sont parfois très consi-

[1] Circular 711 du *Board of Education*, mars 1909. — Traduit et publié avec l'autorisation de *H. M. Stationery Office*. (Réd).

dérables; certaines écoles parcourent en une année le champ des livres I et II d'Euclide, tandis que d'autres (la majorité peut-être) mettent trois ans pour le même programme.

Si à un travail plus lent correspondait un travail plus approfondi et un développement plus complet de l'intelligence, cela n'aurait pas d'importance, mais l'inverse est généralement vrai. Cela ne provient pas du plus ou moins grand nombre d'heures accordées à l'enseignement ou des capacités différentes des maîtres, mais des méthodes employées, méthodes dont les bases émanent de conceptions différentes sur le programme nécessaire pour le 1er enseignement.

Il faut se pénétrer de plus en plus de l'idée que la géométrie d'Euclide (telle qu'elle est généralement envisagée) n'embrasse qu'un champ très restreint qui devrait être traité dans toutes les écoles secondaires. Les raisons pour lesquelles cela ne se fait pas encore se trouvent dans le système d'enseignement des premiers éléments. Cette circulaire a pour but principal d'attirer l'attention sur la question.

La compréhension du sujet nécessite la division de l'enseignement en trois degrés successifs correspondant à ce qui se fait pendant les trois premières années dans les écoles où le travail est lent.

Le 1er degré traite des notions géométriques fondamentales et est généralement intitulé : exercices pratiques préliminaires.

Le 2me degré envisage quelques conceptions fondamentales de la géométrie.

Le 3me comprend une étude plus complète de celles-ci et en outre l'introduction de la déduction.

Pour faire œuvre utile, il est indispensable d'entrer parfois dans des détails insignifiants en apparence; mais ce sont précisément ces détails qui sont à la base de la plupart des difficultés que rencontrent les maîtres dans leur enseignement.

Premier degré.

Il est assez généralement reconnu que le premier enseignement en géométrie doit avoir pour but de familiariser avec les notions géométriques fondamentales, solides, surfaces, lignes, point, direction, angle, etc., et d'initier à l'usage des instruments en géométrie. Il doit donc consister surtout en observations et exercices pratiques. La diversité des opinions sur le choix des sujets et le développement à leur donner dans cette première étude est due principalement à une idée trop confuse du but proposé et de ses relations avec le travail « théorique » qui doit suivre. Ce premier degré est souvent démesurément long, sans résultats patents et le travail théorique est développé indépendamment du reste. Ces écueils seraient évités par une corrélation convenable entre la théorie et la pratique.

Le but de cette première étude est la compréhension complète des notions fondamentales en géométrie. La familiarisation avec les constructions géométriques et l'habileté dans l'emploi des instruments n'y sont que des considérations d'ordre secondaire atteintes plus aisément plus tard lorsque la compréhension des propositions géométriques l'exigera.

La plupart des maîtres sont d'accord sur la méthode d'enseignement des premières notions, c'est-à-dire des notions de solides, surfaces, lignes et points en y associant les idées de volumes, aires et longueurs. Ces notions sont naturellement données sans définitions, celles-ci n'étant en tout cas introduites que plus tard lorsque l'élève a une conception claire de la chose à définir. La définition pourra alors être un bon exercice de composition. L'essentiel est de donner une idée nette du sujet et d'obtenir un emploi exact des noms.

On peut se servir avec succès au début de questions telles que : « Combien faut-il de mesures pour décrire cette boite ? » On amène ainsi aisément à la notion des 3 dimensions d'un solide. On continuera avec des exemples concrets et variés dont quelques-uns semblent à première vue faire exception (une balle, un crayon), deux des dimensions étant numériquement égales ; on comparera avec le nombre de mesures nécessaires pour donner les dimensions d'un plancher ou celles d'une page d'un livre (en opposition à une feuille) et cela jusqu'à la distinction géométrique claire entre les solides et les surfaces.

Il conviendra de poser à cet effet des questions telles que : « Combien de faces, d'arêtes, de sommets a un cube, un cylindre, un cône, etc. ? »

Le travail pratique consistera surtout en fabrication de solides en carton et en dessins de ces corps dans des positions simples.

Les adjectifs qualificatifs (plane, courbe, droit) pourront également être employés. Définir le mot « droit » serait une perte de temps ; les élèves seront généralement déjà familiarisés avec la notion de surface plane et il suffira de ne pas permettre un usage incorrect des termes. Le temps à consacrer à cette première partie et le développement à y donner aux constructions dépend naturellement de l'âge des élèves. Pour de jeunes enfants on se bornerait aux cartonnages en laissant de côté la partie abstraite du sujet. Pour des élèves de 12 ans et plus la partie abstraite est la plus importante, le travail manuel se bornant à la construction occasionnelle d'un solide fait à la maison. Il est superflu de donner des indications pour la construction des figures planes (carrés, triangles, etc.) qui sont comprises dans la construction d'un solide, les élèves les trouvent facilement eux-mêmes et ces indications ne serviraient qu'à distraire l'attention du point principal : le solide.

Il ne faut pas oublier que ce travail est commun au début de l'enseignement mathématique et scientifique et il faut éviter soit une répétition inutile des mêmes sujets, soit une différence trop radicale de méthode.

La notion de direction vient ensuite ; elle est rarement aussi bien traitée et il en résulte plus tard des difficultés pour les angles et les parallèles. Elle est aussi difficile à discuter et encore plus à définir à un point de vue abstrait que celle de couleur.

De même que les enfants acquièrent la notion des couleurs en les observant et en les nommant, de même ils acquéreront la notion de direction, d'une façon claire, en observant et en nommant certaines directions fondamentales telles que verticale, nord, sud, etc.

Au début on évitera l'usage de la représentation sur le papier. On introduira la question ainsi : « Montrez une ligne verticale, comment vérifiez-vous si elle est verticale ou non ? » ce qui conduit à la connaissance du fil à plomb. Ensuite : « Montrez une ligne horizontale, comment vérifier qu'elle est horizontale ? » Cette vérification doit être indépendante de la verticale, ce qui suggère l'idée du niveau d'eau.

Vient ensuite la question : « Peut-on dessiner des lignes verticales sur le mur, sur le pupitre, sur le plancher et de même pour les lignes horizontales.

Puis : Combien de lignes verticales peut-on tracer par un point ? » « Combien d'horizontales ? » et ainsi de suite pour les différentes directions (nord, sud, est, ouest). Les élèves chercheront l'orientation des fenêtres de la chambre et de leur propre position dans celle-ci.

Le maître pourra poser ensuite la question : « Toutes les lignes verticales ont-elles la même direction ? » idem pour les horizontales ; il amènera ainsi à la compréhension des parallèles comme lignes de même direction.

Le maître ne devra pas tolérer, et encore moins pratiquer l'emploi inexact des termes, par exemple : perpendiculaire pour vertical, plane pour de niveau ou horizontal ; il s'assurera que les élèves n'ont pas l'idée que la direction du nord peut être autre chose qu'une horizontale.

La notion d'angle vient ensuite. Elle est généralement traitée d'une manière assez satisfaisante ; cependant il se présente parfois des difficultés dues en partie à une notion insuffisante de la direction, en partie a une représentation prématurée des angles sur le papier. On pourrait avec avantage considérer non seulement la rotation d'une ligne ou de l'une des branches d'un compas, ainsi que cela se fait assez généralement, mais aussi la rotation d'une personne sur elle-même ou de la terre autour de son axe. Des questions simples telles que : « De quel angle tournez-vous au commandement : à droite ? » aideront plus à une conception claire de l'angle qu'un grand nombre d'exercices avec rapporteur sur le papier. Des élèves qui sont censés savoir tout ce qui concerne les angles sont souvent embarrassés par la question : « Un homme se dirigeant vers le nord tourne à droite de 40°, dessiner son parcours. » Ils montrent ainsi que la préoccupation des nombres les a empêchés de saisir la chose elle-même.

La notion générale d'angle acquise, les élèves estimeront des angles par comparaison avec l'angle droit ou la circonférence entière avant d'apprendre à se servir du rapporteur ; ils devront également prendre l'habitude, lorsqu'ils mesureront un angle avec le rapporteur, d'en estimer d'abord approximativement la valeur ; il éviteront ainsi des erreurs grossières dues à une lecture fausse du rapporteur.

Les exercices de mesure d'angle tracés au hasard devront être généralement laissés de côté ; pour le maître ils sont difficiles et longs à bien vérifier et sont avantageusement remplacés par la mesure d'angles obtenus par la construction de triangles. Le mieux est de proposer des problèmes tels que : « Construire un triangle dont les côtés sont ..... et mesurer le plus grand angle. » Le maître en connaît la solution, il peut aisément vérifier le travail de chaque élève, et pour ceux-ci. il est préférable de n'avoir pas à se préoccuper uniquement de la difficulté du maniement du rapporteur.

Les notions fondamentales ayant leur place dans le premier degré sont ainsi traitées. Il est cependant d'usage courant d'introduire encore un grand nombre d'exercices pratiques comprenant non seulement la construction de triangles, la recherche de hauteur et de distances, mais aussi de bissectrices de lignes et d'angles, de dessins, de tangentes à des cercles et même parfois de problèmes de similitude, ceci avant de faire aucun essai d'étude de la géométrie comme science proprement dite. On consacre souvent une année, quelquefois deux, à cette étude. On peut généralement les considérer comme du temps perdu. Lorsque cette étude est faite avant l'étude théorique, les constructions difficiles deviennent facilement des recettes et les plus faciles un amusement avec le compas. Dans les cas où une pratique plus grande du dessin géométrique est désirable, elle pourra s'acquérir plus avantageusement en dessinant des plans, des élévations, des sections de solides simples, exercices qui développent l'imagination géométrique, mais sont indépendants de la géométrie déductive. A moins que cette étude n'ait été commencée à un âge exceptionnellement tendre, il n'y a pas de raison pour que les principes fondamentaux acquis, les élèves ne s'attaquent pas directement au développement théorique du sujet accompagné d'exercices appropriés.

Il y a encore des doutes sur l'opportunité des définitions, des axiomes et des postulats. Les maîtres ayant personnellement étudié cette question sont rares, et les indications des manuels en usage sont peu satisfaisantes. Les définitions peuvent être considérées comme un but en elles-mêmes et il est peut-être utile de faire formuler aux élèves la définition de choses qu'ils connaissent déjà, comme un carré, un cercle, un plan. La mémorisation de définitions obtenues intelligemment et exprimées sous une forme élégante a certainement de la valeur; mais ce ne sont que des buts secondaires, les progrès en géométrie n'en dépendent pas. Certains termes sont indéfinissables, comme dimension, direction, même peut-être angle, et devront être traités de la manière déjà indiquée. Un grand nombre de termes, tels adjacents, alterne, extérieur, diagonale, obtus, aigu, peuvent être introduits incidemment et n'ont pas besoin de définition; il suffit de n'en pas permettre un faux emploi. Lorsque le maître parle d'un segment, il ne faut pas que l'élève se représente un secteur ou qu'il confonde les termes inscrit et circonscrit. Les explications nécessaires se donneront aisément au moyen du dessin. L'élève n'apprendra rien de neuf par ces définitions et, sauf peut-être pour quelques-unes de celles du premier groupe mentionné, n'éprouvera pas le besoin de les avoir sous une forme explicite. Certaines notions pourront cependant être définies à priori et cela de diverses manières. Par exemple, l'ellipse peut être définie comme la section d'un cône ou par les propriétés des foyers et directrice, ou encore des deux distances focales, etc.; définitions qui, à première vue, ne semblent pas amener au même résultat.

Il est essentiel d'avoir à la base de toute démonstration une définition déterminée (dont le choix est une pure convention) et de se limiter à celle-là jusqu'au moment où les autres propriétés qui auraient également pu servir de définition en auront été déduites. Le parallélogramme peut également être défini de plusieurs manières : par ses propriétés de parallélisme, par celle d'égalité des côtés opposés ou par celle d'égalité des angles opposés. Pour pouvoir faire une démonstration se rapportant au parallélogramme ou pour démontrer qu'une figure donnée est un parallélogramme, l'élève doit savoir exactement ce qu'il peut supposer connu et ce qu'il doit démontrer, il est donc indispensable de convenir d'une définition particulière. Les définitions dont une connaissance imparfaite peuvent entraver les progrès de l'élève en géométrie sont donc celles dont le choix est uniquement une affaire de convention comme celle du parallélogramme. Toutes les autres peuvent être employées ou exclues à volonté, elles ne sont pas indispensables.

Les axiomes sont encore moins nécessaires et il est peut-être préférable de les laisser complètement de côté. C'est vrai soit pour les axiomes généraux soit pour les axiomes géométriques, pour des raisons diverses.

L'énoncé abstrait : « Deux choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles » n'aidera en rien un élève qui a de la peine à conclure que si $A = B$ et $B = C$ il s'ensuit que $A = C$. Pour qu'il la réalise absolument il faut que cette conclusion lui apparaisse comme une chose évidente, sans le secours d'aucune autorité extérieure. De même si un élève ne se rend pas compte de l'évidence du fait : si $2x = 10$ alors $x = 5$, le renvoi à un axiome ne le convaincra pas. Formuler de tels axiomes peut être un exercice intéressant, mais n'est pas nécessaire au progrès en géométrie et, imposé à cette période des études, peut devenir un obstacle sérieux au progrès (d'autant plus que ce genre de travail est antipathique à la plupart des élèves).

Pour les axiomes géométriques le cas est encore plus grave. Non seulement ils ne sont pas nécessaires à la conception des théorèmes et démonstrations présentés à l'élève d'une manière convenable, mais sous la forme donnée par Euclide, et qui est encore en usage, ils ne sont ni suffisants, ni nécessaires à l'édification de la géométrie. Au reste, l'étude de ces axiomes a donné naissance à une nouvelle branche de la science, branche semée de difficultés et de points délicats, qui n'est familière qu'à un petit nombre de savants, lesquels ne sont pas encore d'accord. Cela ne rentre dans le cadre ni de la compréhension, ni du champ naturel d'activité des élèves. Cependant, continuer à enseigner que toute géométrie repose sur les axiomes d'Euclide, serait faux aussi bien qu'inutile.

Deuxième degré.

La notion d'angle acquise, les théorèmes fondamentaux concernant les angles peuvent être introduits et, comme suite naturelle, l'égalité des triangles en y joignant un grand nombre d'exercices, notamment la construction de triangles avec diverses données et la résolution de problèmes de hauteurs et distances au moyen du dessin. Il faudra commencer à exiger le soin et la correction du dessin. C'est par la comparaison avec les résultats numériques que les élèves apprendront à apprécier la valeur, non seulement d'un travail exact, mais aussi de la possession de bons instruments.

Ce ne seront naturellement pas les seuls avantages de cette étude; il faut premièrement faire observer que 3 données sont nécessaires et suffisantes pour déterminer un triangle. Les questions de hauteurs et distances (dans des cas qui ne soient pas trop simples) sont également un très bon exercice de développement, soit de l'imagination, soit de la faculté de compréhension et de représentation graphique d'un fait.

Le second degré consiste donc à établir les théorèmes fondamentaux, soit dans le 1er livre d'Euclide 13-15, 27-29, 32 ; ainsi que 4, 8 et 26.

Les maîtres seront probablement tous d'accord que ces éléments acquis, les progrès peuvent être relativement rapides, mais que les élèves passent précisément trop de temps, sans résultat satisfaisant, sur ces théorèmes eux-mêmes. En effet, on y consacre fréquemment une année entière. Un des arguments principaux mis en avant en faveur de cette méthode est le développement des facultés qu'elle entraîne, mais en réalité le travail subséquent est supérieur dans les écoles où ces théorèmes sont traités plus rapidement.

L'ordre dans lequel ces théorèmes sont présentés varie avec les méthodes. Evidemment l'unité du sujet exigerait que ces théorèmes soient pris simultanément ou en 2 groupes, ainsi qu'il a déjà été indiqué ; l'un contenant tous les faits fondamentaux concernant les angles, l'autre les 3 cas d'égalité des triangles. Le défaut essentiel de l'ordre d'Euclide au point de vue de l'enseignement est la séparation de théorèmes étroitement liés suivant ainsi non pas l'ordre naturel du sujet, mais un ordre tout artificiel ayant pour but de faciliter les démonstrations logiques. La majorité des manuels actuellement en usage suivent l'ordre naturel, quelques-uns cependant n'ont pas encore abandonné complètement l'ordre peu pratique d'Euclide. Cependant même les auteurs qui suivent un ordre naturel ne se sont pas débarrassés tout à fait des difficultés inhérentes aux démonstrations euclidiennes. Ils se voient tous obligés d'introduire un théorème supplémentaire (généralement I. 5) avant I. 8 détruisant ainsi l'unité du groupe 4, 8 et 26. Presque tous se servent encore de la démonstration d'Euclide pour le théorème I. 13 (leur 1er théorème) ; démonstration qui donne beaucoup de mal soit aux maîtres, soit aux élèves et qui est rendue complètement inutile par l'idée moderne d'angle. Ils donnent également une démonstration pour I. 29, alors que celle-ci est si difficile qu'un livre très connu l'a marquée comme devant être laissée de côté dans une première lecture. Tous ces théorèmes rentrent du reste dans le champ des connaissances de ceux qui ont suivi le cours préliminaire d'exercices. Ces propositions semblent évidentes aux élèves (préparés par un bon cours préliminaire) et les soi-disant démonstrations les rendent non pas plus évidentes, mais plus obscures. Il faut plus que partout ailleurs se rappeler qu'Euclide a écrit non pas pour des enfants, mais pour des adultes. Commencer un sujet en cherchant à démontrer aux élèves ce qui, à leur avis, ne nécessite aucune preuve est le bon moyen de leur faire croire que toute la suite sera artificielle et irréelle. Il vaut mieux n'aborder les démonstrations euclidiennes, c'est-à-dire déductives, qu'au moment où leur nécessité se fait sentir, soit après les théorèmes fondamentaux, la démonstration étant alors une opération naturelle qui n'est sujette à aucune règle arbitraire ou artificielle.

De ces théorèmes fondamentaux dépendent toutes les déductions qui suivront, l'essentiel en ce qui les concerne n'est donc pas de les analyser et de les réduire au nombre minimum d'axiomes ou de postulats (méthode d'Euclide), mais de les présenter de telle sorte que leur vérité soit aussi évidente pour l'élève que la différence entre le noir et le blanc ou entre sa main gauche et sa main droite. Tout procédé qui ne permet pas d'arriver à une notion claire et complète de ceci est défectueux qu'elle que soit sa valeur logique et provoque fatalement des erreurs grossières dans les travaux subséquents par défaut de compréhension des théorèmes fondamentaux si laborieusement démontrés.

Les preuves euclidiennes de ces théorèmes n'ont donc pas leur place au début, l'attention devant être concentrée non pas sur des preuves formelles, mais sur la représentation exacte et évidente des théorèmes eux-mêmes.

La meilleure méthode à employer pour atteindre ce but est une considération de détails sur lesquels l'opinion des maîtres peut naturellement diverger.

L'expérience semble cependant prouver que le mieux est de procéder comme suit :

Angles et parallèles.

Le théorème I. 13 ne nécessite plus aucune démonstration, bien que peu d'auteurs se soient rendus compte soit de ce fait, soit de la raison pour laquelle la méthode d'Euclide nécessitait une démonstration. Euclide considérait comme évidente la possibilité de l'addition des angles et le fait que 2 angles AOP et POB sont ensemble égaux à un angle AOB. Il ne pouvait pas l'appliquer au cas où AOB vaut 180° car pour lui un tel angle n'existait pas ; cela l'obligeait à subdiviser ses angles de la même façon que si, incacables de compter plus loin que 9, nous voulions démontrer que $6 + 4 = 5 + 5$ nous serions alors obligés de dire $6 = 5 + 1$ donc

$$6 + 4 = 5 + 1 + 4$$

et

$$5 = 1 + 4$$

d'oú

$$5 + 5 = 5 + 1 + 4$$

et

$$6 + 4 = 5 + 5$$

Un tel procédé est déjà peu attrayant pour un enfant, mais lorsque de plus chaque symbole, qui avait une signification propre, doit être remplacé par 3 lettres (dans un ordre déterminé) désignant un angle, il est très naturel qu'il y trouve de grandes difficultés.

Pour la même raison I. 14 n'a pas besoin de démonstration. Les propriétés cependant doivent être formulées et leur énoncé appris afin de pouvoir servir comme instrument dans une argumentation.

Le théorème 15 peut être démontré sans aucune difficulté par déduction, mais il est préférable, la propriété à démontrer étant évidente, de réserver l'exercice de la déduction à un cas plus opportun, c'est-à-dire dans lequel la vérité du théorème soit moins évidente de sorte que la nécessité d'une démonstration devienne apparente.

Les théorèmes 27-29 ainsi que 32 peuvent être présentés au moyen de la rotation. La méthode ordinaire basée sur la rotation d'une droite est bonne, mais il vaut peut-être encore mieux amener les élèves à se représenter un homme marchant le long d'une ligne brisée (27-29) ou autour d'une figure (32 cor. 2). Ceux qui s'occupent de rechercher les principes à la base des mathématiques ne sont pas d'accord sur la valeur de cette méthode en tant que démonstration ; pour le maître d'école la question ne se pose pas. Pour lui, le point essentiel est d'arriver à faire saisir ces théorèmes à ses élèves et cela de la manière la plus claire et la plus durable possible. De plus, en présentant ainsi les choses, les vérités géométriques sont associées non pas seulement avec le dessin, mais avec les circonstances ordinaires de la vie.

L'expérience démontre que par cette méthode les théorèmes apparaissent aux élèves comme des faits naturels dont ils se rendent maîtres en fort peu de temps.

Triangles égaux.

De l'avis de la plupart des maîtres, l'introduction du procédé de superposition à cette période des études entraîne une perte de temps considérable et beaucoup d'ennuis, lesquels ne sont pas compensés par les résultats obtenus. En effet, l'examen des travaux subséquents des élèves révèle souvent des erreurs très grossières qui montrent que l'impression produite par cette étude a été très superficielle.

L'égalité des triangles peut être traitée avec succès comme suit : Le maître dessine *un* triangle sur le tableau noir et demande : « Quels éléments de ce triangle faut-il mesurer pour pouvoir le reproduire ? » Suit la construction pas à pas du second triangle en mettant en évidence la propriété que 3 mesures (choisies convenablement) le déterminent sans ambiguïté. Ce procédé est évidemment le même que celui de superposition, mais la construction graduelle de la seconde figure est aisée à suivre et le fait que 3 conditions déterminent un triangle en découle tout naturellement ; tandis que la comparaison de 2 figures déjà dessinées est plus difficile à effectuer et à saisir pour un débutant.

Grâce à cette méthode, quelques minutes suffisent à une classe pour comprendre les 3 théorèmes d'égalité, ce qui permettra d'insister immédiatement sur leur utilité. Les élèves apprendront naturellement les énoncés de ces théorèmes. Au besoin on donnera plus tard les démonstrations classiques, alors que leur étude ne présentera plus pour l'élève les mêmes difficultés.

Le deuxième degré, c'est-à-dire la présentation des théorèmes fondamentaux étant ainsi condensé en quelques leçons, il sera préférable de ne pas interrompre l'ordre des études par des problèmes théoriques. Il faudra par contre faire faire des exercices pratiques, spécialement sur des questions de hauteurs et distances ; mais tout travail de déduction sera laissé de côté jusqu'à complète possession des théorèmes fondamentaux, instruments qui permettront de résoudre les problèmes qui suivront. Intercaler des problèmes théoriques (sauf peut-être un ou deux sur les angles après la 1re partie et avant la 2me concernant l'égalité) tend plutôt à affaiblir l'impression qu'il est essentiel que ces théorèmes produisent.

Troisième degré.

Jusqu'à ce moment l'étude de la géométrie devait être basée uniquement sur une observation minutieuse de choses familières, sur l'expérience et sur l'intuition directe ; base qui remplace les définitions, postulats et axiomes géométriques d'Euclide ainsi que sa manière de traiter certains théorèmes.

Dorénavant, bien que l'intuition et l'expérience soient encore utilisées pour trouver les théorèmes, il s'y adjoindra une démonstration déductive absolue, basée sur les théorèmes fondamentaux précités.

Il est inutile de faire de longs développements sur cette 3me période qui doit être le développement général de la déduction à la suite des théorèmes fondamentaux. Les différences entre un bon et un mauvais enseignement restent naturellement très grandes, mais les méthodes ne peuvent guère différer d'une façon essentielle. Quelques points cependant méritent d'être relevés. Chaque domaine nouveau sera, autant que possible, amené par un travail personnel. Des théorèmes nouveaux seront suggérés au moyen de problèmes. Le but est bien l'étude des théorèmes classiques, mais ceux-ci seront appris plus facilement et avec plus d'intérêt si les démonstrations en ont été préalablement découvertes.

Les théorèmes seront pris, dans la mesure du possible, par groupes.

Souvent, au lieu de présenter à une classe un théorème tout énoncé qu'il ne reste plus qu'à démontrer, il sera possible de poser des questions qui amènent les élèves à énoncer eux-mêmes le théorème. Par exemple, au lieu de dire : « Démontrez que si la diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'angle, la figure est un losange », il vaudra mieux demander : « Est-il vrai que la diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'angle ? La réponse donnée, on continuera : « Pour que ce soit le cas, de quel genre doit être le parallélogramme ? ». Après réponse ; « Faites-en la démonstration ». On demandera de même : « Quelle est la relation entre les côtés opposés d'un parallélogramme ? » plutôt que de dire, le théorème suivant est : « Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux ». Ce procédé facilite la recherche de la démonstration et, ce qui est plus important, développe l'observation et l'imagination des élèves et les amène à considérer les différents cas possibles dans une figure.

A mesure que les études progressent, il devient plus important de connaître les théorèmes eux-mêmes que leur démonstration.

Dans les revisions, il sera bon de demander : « Quels théorèmes employez-vous pour démontrer tel ou tel autre théorème ? » C'est un critérium efficace des connaissances et en même temps cela aide à faire du tout un édifice logique.

Les exercices ne doivent pas être considérés comme un but. Leur importance varie avec les sujets, elle est maximum lorsqu'une nouvelle notion doit être assimilée. Ainsi lorsque les notions de lieux, enveloppes, proportions, similitude seront introduites, les exercices occuperont une place importante. A part cela, lorsque les premiers éléments du sujet sont terminés, ils diminuent d'importance et l'attention devra en premier lieu se porter sur le développement de la puissance géométrique et logique.

Il faut reconnaître que si l'étude d'un sujet ne développe pas la faculté de résoudre des problèmes nouveaux, elle est inutile. Lors même que les examinateurs continueraient à laisser passer les candidats qui se bornent à répéter les démonstrations qu'ils ont apprises accompagnées de définitions, les maîtres ne devraient pas s'en contenter ; la seule preuve valable d'acquisition de connaissances est la faculté de les appliquer à des sujets nouveaux.

Les problèmes introduisant des notions nouvelles à considérer en premier lieu sont ceux qui utilisent l'égalité des triangles avec, bien entendu, les théorèmes fondamentaux sur les angles et les parallèles. Presque tous les élèves peuvent apprendre à les résoudre et jusque-là rien d'autre n'est digne d'attirer leur attention.

Il est très important de cultiver l'habitude de considérer les modifications successives d'une figure : « Qu'arrive-t-il aux diagonales d'un parallélogramme si l'angle compris entre les côtés adjacents varie ? » « Qu'arrive-t-il à la distance entre 2 points lorsque l'un d'entre eux se meut le long d'une circonférence de cercle, de même pour la corde d'un cercle s'éloignant du centre, etc.

Ceci est spécialement important en ce qui concerne les théorèmes prêtant à des erreurs lorsque la mémoire seule est en jeu, par exemple pour ceux concernant les rectangles obtenus par l'intersection des cordes d'un cercle ou ceux concernant le carré construit sur le 3me côté d'un triangle. La notion de changement ou de mouvement doit être introduite aussi souvent que possible. C'est ce qui fait l'une des supériorités de l'idée moderne de la tangente sur celle d'Euclide. C'est également pour cette raison que la recherche de lieux géométriques est un si bon exercice.

Il faudra, autant que possible, que les exercices dépassent la théorie. De même que les hauteurs et distances sont résolues graphiquement longtemps avant d'être obtenues par la trigonométrie, de même on donnera des lieux et des enveloppes à tracer, sans s'inquiéter de savoir s'ils donnent des droites ou des cercles ou s'ils appartiennent au programme parcouru dans la théorie. Ce travail est utile non seulement au point de vue éducatif, mais par l'apport d'un nouvel instrument de travail.

Les meilleurs exercices sont souvent ceux qui se font sans instruments ou même sans papier, ni crayon. Pour répondre à la question : « Les diagonales d'un parallélogramme sont-elles égales ? » il n'est pas nécessaire de dessiner laborieusement plusieurs parallélogrammes exacts Il suffit d'en esquisser quelques-uns ou mieux encore, de se les représenter mentalement.

Un défaut des cours de géométrie de bien des écoles est de les limiter exclusivement à la géométrie à 2 dimensions. Même lorsque la géométrie des solides ne doit pas être traitée, il faut saisir toutes les occasions de diminuer la dépendance de l'élève vis-à-vis de la représentation graphique. On étendra ainsi à l'espace des questions telles que : « Quel est le lieu des points équidistants de 2 points donnés, des points à une distance constante d'une droite donnée ou d'un point donné. Outre cela, on trouvera le temps de donner un aperçu rapide de géométrie des solides lorsque les premiers degrés des études auront été franchis rapidement et convenablement. Le onzième livre d'Euclide a la réputation d'être ennuyeux et difficile; tout ce qu'il contient d'important peut être traité beaucoup plus rapidement, surtout en faisant un usage fréquent de l'idée de mouvement d'une ligne ou d'un plan. Il faudrait de même introduire l'étude des solides, étude qui serait beaucoup facilitée par le fait que les grandes lignes auraient été rendues familières dès le début.

GRAPHIQUES

Il est maintenant usuel d'adjoindre plus ou moins de travail graphique à l'algèbre. On fait entrer ainsi un élément de réalité dans un sujet souvent très abstrait et irréel, ce qui ne peut avoir que de bons résultats. Il est rare de rencontrer des gens ayant une idée précise sur la place que cette étude doit occuper et sur les avantages qui doivent en résulter. Elle est trop fréquemment considérée comme un fardeau additionnel qui ne trouve place qu'en sacrifiant autre chose. Cela provient en grande partie de la manière dont ce sujet est traité dans les manuels, seuls guides des nombreux maîtres non spécialistes. Le procédé habituel consiste à commencer par déterminer des points isolés, puis à rechercher l'aire des triangles et des diverses figures formées par ces points, ensuite à représenter des équations du 1er degré en les amenant à la forme réduite et enfin à résoudre graphiquement des systèmes simples de 2 équations simultanées. Dans tout ceci il n'y a pas grand'chose qui ait une influence capitale sur l'étude des principes de l'algèbre ordinaire. La résolution graphique d'équations simples soulève, avec raison, une objection que l'élève exprime parfois : « Pourquoi employer des procédés relativement compliqués alors que la méthode directe serait plus simple : » En général, la méthode graphique n'est appliquée aux fonctions du 2me dégré que lorsque l'étude du 2me degré est abordée d'une manière générale. Là encore on se préoccupe beaucoup trop de la solution d'équations qui, pour la plupart, se résolvent plus aisément algébriquement. On enseigne trop rarement aux élèves qu'ils peuvent employer la méthode graphique pour la résolution d'équations de degré égal ou supérieur au 3me ou encore d'autres expressions qu'ils ne pourraient résoudre autrement. Quelquefois, lorsque l'étude en est poussée plus loin, le but proposé est la réduction de l'équation du 2me degré à la forme réduite, recherche du centre, des asymptotes et des axes. Cette étude est alors considérée non pas au point de vue de l'algèbre élémentaire, mais à celui de la géométrie analytique ; de telle sorte que de la façon dont elle est présentée dans la plupart des manuels, elle n'est qu'un chapitre prématuré de géométrie analytique.

Dans ce cas on peut, avec justice, regarder le travail graphique comme une adjonction au travail ordinaire et qui ne fait rien ou presque rien pour rendre celui-ci plus facile ou plus intelligent, il vaut alors peut-être mieux le laisser de côté. Il existe cependant un meilleur moyen apparamment peu connu des maîtres. Pour l'exposer en entier, il faudrait non pas se contenter d'ajouter un chapitre ou deux aux manuels existants déjà comme l'ont fait leurs auteurs, mais écrire un nouveau traité d'algèbre. Cela sortirait du cadre de la présente circulaire ; il faut se borner ici à noter quelques faits saillants.

La méthode graphique peut être introduite très tôt, au moment de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

La représentation graphique des statistiques, si elle n'est pas déjà connue, sera expliquée et fera le sujet de quelques exercices ; on se bornera naturellement à des statistiques en rapport avec les connaissances réelles des élèves.

Les élèves réaliseront expérimentalement la différence entre une simple reproduction d'une série de valeurs discontinues et probablement sans liaisons, comme les températures maxima d'une suite de jours successifs, et un graphique continu admettant l'usage de l'interpolation.

Il faut ensuite passer des simples statistiques à d'autres questions telles que :

La distance entre Londres et Bristol étant de 120 milles, quelles seront les vitesses moyennes des trains parcourant cette distance en 2, 3, 4,..... heures ? Représenter graphiquement les résultats.

On poussera la question plus loin en continuant à faire varier le temps de parcours et comme de cette manière, on s'éloigne des vitesses réelles d'un train, on pourra, pour obtenir une courbe complète, employer à l'une des extrémités les vitesses du son et de la lumière et à l'autre extrémité celles d'un cycliste, d'une voiture, d'un fourgon, d'un piéton. On voit ainsi l'utilité de l'expression algébrique $\frac{120}{x}$ ainsi que toutes ses valeurs représentées graphiquement, et on donne incidemment d'une façon simple et efficace la conception nouvelle d'infini et du zéro mathématique. D'autres exemples seront fournis par les problèmes des livres d'arithmétique, spécialement ceux du chapitre des « proportions ». Ces questions comprendront naturellement le cas de proportion directe et inverse (tel que la valeur d'une somme placée à intérêts simples) où il y a accroissement proportionnel et les intérêts composés où il n'y a pas de proportionnalité.

Cette méthode a une grande valeur pour l'étude de l'arithmétique, la signification de proportion directe et inverse étant mise en évidence, ainsi que le fait que ces relations n'existent pas toujours.

On acquiert ainsi une grande habitude du calcul mental et ce qui est encore plus important cela oblige à résoudre plusieurs cas d'un même problème. L'élève apprend ainsi par expérience qu'à un travail exact correspond un résultat graphique rationnel et il est graduellement initié à la notion de continuité.

Une fois qu'une expression algébrique analogue à $\frac{120}{x}$ a été formulée, le maître pourra donner de telles expressions presque au hasard et laisser les élèves les reproduire graphiquement. Un bon exemple pour le début est $(x - 2)(x - 4)$ qui entraîne de suite plusieurs remarques : la signification des parenthèses, la loi des signes dans la multiplication, la représentation graphique des valeurs négatives et l'extension de l'application du terme « x » aux valeurs négatives. Au début, il vaut mieux ne pas introduire la lettre « y » comme nom de la fonction de x.

Les élèves commettront d'ailleurs bien des erreurs, soit d'arithmétique, soit d'interprétation, mais ces difficultés seront vite surmontées et une fois que les élèves ont expérimenté eux-mêmes qu'un travail minutieux donne des courbes continues, la bataille est gagnée.

Il faut naturellement de la variété ; tandis que les élèves moins avancés traiteront des cas simples, les autres s'attaqueront à des fonctions plus compliquées, par ex. :

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6) \quad \text{ou} \quad \frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 4)}$$

Les élèves se rendront alors compte qu'ils peuvent représenter graphiquement toute fonction algébrique explicite. Il vaudra généralement mieux s'en tenir à la forme en facteurs indiquée ci-dessus ; les notions d'arithmétique impliquées sont alors beaucoup plus simples et les élèves ont plus de liberté pour s'attacher au travail essentiel consistant à tracer la courbe. Ils atteignent ainsi plus rapidement le but, soit la réalisation de la continuité et la constatation de la rationalité et de l'enchaînement des lois de l'arithmétique ou de l'algèbre.

Ce travail remplacera avantageusement les évaluations ennuyeuses et sans signification que l'on trouve dans le 1er chapitre des manuels ordinaires d'algèbre.

Lorsque les élèves ont appris à travailler d'une façon satisfaisante on pourra leur proposer quelques formes linéaires (par exemple $2x + 5$). Il est préférable de ne pas commencer, comme cela se fait généralement, avec de telles formes, car il est important que dès le début toutes les formes soient considérées indifféremment comme abordables par les élèves ; de plus le fait que les fonctions du 1er degré sont représentées par une ligne droite fera beaucoup plus d'impression s'il est appuyé d'une série d'exemples plus généraux où ce n'est pas le cas que s'il est seul connu.

Naturellement les fonctions seront d'abord calculées pour des valeurs entières de x ; dans des cas simples, ce sera suffisant pour faire apparaître la courbe. Cependant, afin d'affermir encore chez les élèves l'idée de la continuité d'une courbe et quelquefois d'obtenir la forme de la courbe plus complètement, on introduira des valeurs fractionnaires de x. On pourra demander : « Quelle valeur la fonction a-t-elle pour $x = 3\,{}^1/_2$? » Après avoir cherché la valeur par le dessin, les élèves la vérifieront par le calcul.

Lorsque les élèves auront dessiné une courbe, par exemple : $(x - 2)(x - 4)$ il faudra leur faire résoudre une équation telle que $(x - 2)(x - 4) = 5$. Cela donne des indications nouvelles sur la notion si importante de l'équation elle-même. La première solution obtenue sera approximative. Il faudra immédiatement la vérifier arithmétiquement, la comparaison du résultat et de la courbe permettra de reconnaître le sens de l'erreur. Il pourra être nécessaire, soit de dessiner de nouveau la courbe, soit même de la dessiner à une autre échelle ; les meilleurs élèves devront arriver à un résultat exact à la 2me décimale près. Cela entraîne des exercices arithmétiques sur les fractions et les décimales, ainsi que de l'exactitude dans les mesures et le dessin. Les élèves plus avancés pourront aussi résoudre quelques équations d'un degré égal ou supérieur au 3me, ils se rendront ainsi compte de la puissance de la méthode qu'ils ont entre les mains.

Tout ceci pourra fort bien se faire dès le début et indépendamment de l'enseignement ordinaire de l'algèbre. Les élèves se rendront ainsi évidemment maîtres des notions essentielles de l'algèbre, soit la cohérence dans les résultats et par conséquent la rationalité des lois fondamentales et la signification des équations.

Le travail graphique ne comprendra rien de plus, car il ne doit pas être un but, mais un moyen. Toutes les méthodes particulières, la réduction à des formes spéciales ou la considération approfondie de cas spéciaux doivent être renvoyées à plus tard.

Indiquons en passant qu'il vaut mieux ne pas faire les premières constructions graphiques sur du papier quadrillé. Les élèves se serviront d'abord de papiers unis ou de tableaux noirs et marqueront les mesures au jugé ou à l'aide d'une règle graduée. Puis, lorsque l'idée directrice sera bien nette dans leur esprit, on les initiera à l'usage du papier quadrillé comme moyen simplificateur.

La méthode de représentation graphique, une fois acquise, elle sera rappelée de temps à autre par un exercice, généralement une équation à résoudre ; son utilité est également notable en algèbre.

On peut donner un exemple qui montrera la meilleure manière dont on peut traiter un point, considéré comme difficile, celui des indices fractionnaires et négatifs. L'emploi des graphiques pour le calcul des logarithmes est maintenant assez général, mais l'utilité de son application à cette période plus précoce a rarement été reconnue.

Supposons qu'il s'agisse d'initier une classe à l'extension de la notion d'indice. Si le maître dit à ses élèves : « Tracez la courbe 2^x », ceux-ci chercheront naturellement les valeurs pour x valant 2, 4, 8, 16, etc., et ils joindront tout naturellement les points correspondant par une courbe.

Cela suggérera de suite la question : « De quel droit tracez-vous cette courbe, que signifie $2^{1,5}$? » Cela n'a pas de signification, mais la courbe lui donne une valeur soit 2,8. Demandez ensuite d'où peut provenir une expression telle que $2^{\frac{3}{2}}$, soit en prenant la racine carrée de 2^3. Ce résultat correspond à la valeur donnée par la courbe. On prendra également d'autres cas tels que $2^{\frac{5}{2}}$ et $2^{\frac{4}{3}}$.

Remarquons ensuite que la courbe s'arrête brusquement à $x = 1$, jusqu'ici les courbes ne s'arrêtaient pas brusquement. Où semble-t-elle aller ? évidemment pas à l'origine ; cela amènera à la considération de 2^0 puis de 2^{-1}, etc.

Cette méthode donnera aux élèves une idée ferme et précise de la rationnalité de l'extension des définitions, idée qui est rarement obtenue par les méthodes ordinaires et permettra ainsi de ne pas aborder encore les démonstrations qui prouvent que les nouvelles définitions se conforment aux lois des indices ; démonstrations que les élèves trouvent difficiles à cette période de leurs études et qui sont par conséquent peu convaincantes et psychologiquement fausses.

La signification des indices fractionnaires et négatifs étant établie, les élèves peuvent tracer les courbes 10^0, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, 10 et employer leurs graphiques à la recherche des indices des puissances de 10 donnant les nombres naturels ; ils obtiennent donc les éléments d'une table de logarithmes. L'exactitude peut facilement être poussée jusqu'à la 2me décimale. L'introduction des tables à 4 décimales sera alors aisée.

De même, lorsque des expressions du 2me degré sont considérées simultanément, on y joindra leur interprétation graphique. La forme $xy = c^2$ sera déjà familière. La forme $x^2 + y^2 = c^2$ devra être interprétée. Il ne sera généralement pas nécessaire d'aller plus loin. On traitera cependant encore le principe de tangence dépendant de l'égalité des racines ainsi que le cas plus étendu d'intersection en points réels et imaginaires, le chapitre ordinaire sur les racines des équations du 2me degré étant sans cela ennuyeux et sans but et n'ayant aucun contact avec l'expérience.

L'acquisition approfondie et précoce de l'habitude de la représentation graphique facilite dans une large mesure les débuts de la trigonométrie et de la mécanique. En tant que cela concerne l'algèbre élémentaire tout ce qui a une réelle valeur a été suffisamment indiqué.

RÉSUMÉ

Premier degré.

Familiariser avec les notions géométriques fondamentales et arriver à une conception claire de celles-ci, cela en observant les faits ordinaires de la vie et au moyen d'exercices pratiques. Le développement et le degré d'exactitude de ces travaux pratiques devra naturellement s'inspirer de ce but.

Les matières à traiter sont : les solides, surfaces, lignes, points, volumes, aires, longueurs, direction, angle, parallélisme.

Les exercices pratiques de modèles de figures planes seront laissés de côté ; les constructions seront apprises plus tard.

Les définitions seront évitées, mais on exigera un usage exact des termes.

Les axiomes et les postulats ne seront ni appris ni même mentionnés.

Deuxième degré.

Pour bâtir la géométrie déductive, la connaissance de certains théorèmes fondamentaux sur les angles, les parallèles et l'égalité des triangles est nécessaire, parce qu'elle offre une base plus large que celle d' « axiome et postulat » d'Euclide. Ces théorèmes se baseront sur l'intuition et seront étayés d'exercices pratiques, les énoncés en seront appris avec exactitude.

Le dessin devra être minutieusement correct et sa précision vérifiée numériquement.

Les problèmes théoriques seront laissés de côté.

Troisième degré.

Cours logique de géométrie déductive basé sur les principes et théorèmes fondamentaux accompagnés de travaux originaux. Des théorèmes nouveaux seront mis en lumière par des problèmes théoriques. Les exercices pratiques seront multipliés lorsqu'il y a une idée nouvelle à assimiler.

Le travail pratique ne doit jamais être un but, il doit généralement précéder les connaissances et peut avec avantage aller au delà de ce qui doit être traité dans la théorie.

L'élève doit être mis en état de résoudre des problèmes théoriques.

Un cours de géométrie des solides est à recommander.

GRAPHIQUES.

Ce travail servira d'introduction explicative à l'algèbre élémentaire et non d'introduction à la géométrie analytique.

Le premier travail graphique, après le tracé ordinaire de statistiques discontinues devra comprendre des fonctions explicites non linéaires illustrant la nature des expressions algébriques en général.

La résolution des équations devra être suivie de la vérification arithmétique des résultats.

Le travail graphique ne doit pas être un but, mais un moyen.

Mars 1909 W.-N. BRUCE
Principal Assistant Secretary.

(Traduction de Mlle R. MASSON, Genève.)

BIBLIOGRAPHIE

O. BLUMENTHAL. — **Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini.** — 1 vol. gr. in-8° de VI-150 pages ; 5 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

En analysant, dans un article voisin, la *Théorie de la croissance,* de M. Borel, j'essaie de donner une idée de l'importance de cette notion quant à l'étude des fonctions. Le livre de M. Blumenthal, paraissant en même temps, fournit à point un nouvel exemple de toute première qualité. La décomposition des fonctions entières en facteurs primaires conduisit tout d'abord à attacher une grande importance à la notion du *genre;* toutefois les problèmes les plus divers (par exemple le prolongement analytique d'après la méthode de M. Mittag-Leffler) réintroduisirent des fonctions dont la distribution des zéros était difficile à préciser et d'autre part, ce qu'il importait de connaître était surtout leur mode de croissance. Aussi les recherches s'orientèrent dans cette direction et la notion d'*ordre* s'imposa à son tour de façon impérieuse. Les fonctions entières d'ordre fini croissent exponentiellement ; il y a des fonctions d'ordre nul qui croissent moins vite et des fonctions d'ordre infini à croissance plus rapide. C'est surtout à ces dernières que l'auteur s'attache en essayant de montrer que ses résultats peuvent comprendre comme cas particuliers ceux qui sont relatifs à l'ordre fini.

Une des notions fondamentales introduites dans ce livre est celle de *fonction-type ;* c'est une fonction de comparaison adjointe à celle qu'il s'agit d'étudier et qui permet une étude plus simple à une foule de points de vue,