E. A. Fouët. — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. — Deuxième édition. Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de XII-265 pages; 9 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

vent de comparaison sont d'abord l'exponentielle et le logarithme ; la *réitération* de l'exponentielle nous offre des types croissant de plus en plus vite, au delà desquels il y a d'ailleurs des fonctions croissant plus vite encore, la conception de ces dernières étant toutefois impossible ou au moins inutile dans l'état actuel de l'Analyse. Ces simples indications montrent non seulement l'utilité mais encore la curiosité qui s'attache à l'étude de la croissance.

Supposons maintenant étudiée la croissance d'une certaine fonction analytique. Que pouvons-nous en conclure quant à la croissance de sa dérivée ou de son intégrale ? C'est là un problème qui évidemment s'est déjà rencontré bien souvent et dont les géomètres se sont tirés au hasard d'inspirations particulières. M. Borel cherche quelques généralités ; de plus, dans ces dernières années, des travaux, comme ceux de M. P. Boutroux sur les fonctions entières, ont nécessité l'étude approfondie de la croissance de certaines intégrales. Le tout permet déjà l'existence des grandes lignes d'une théorie. L'étude de la croissance des termes d'une série permet d'obtenir bien plus que ne donnent les anciens critères de convergence ; nous pouvons, par exemple, reconnaître si une série divergente converge asymptotiquement et, à propos de séries asymptotiques, M. Borel est revenu très élégamment sur les propriétés de la fonction gamma. Je signale aussi la croissance des fonctions entières comparée à celle de leurs zéros. Un dernier chapitre sur les applications arithmétiques est du plus puissant intérêt. Comme je l'ai dit plus haut, la notion de croissance permet de *définir* des fonctions que d'autre part on ne peut *connaître ;* un paradoxe semblable se présente au début de la théorie des nombres incommensurables et, dès lors, l'approximation de ceux-ci par des nombres rationnels ressemble de manière frappante à la représentation approchée d'une fonction par une autre dont la croissance est connue. On conçoit tout ce que ce rapprochement peut avoir de fécond, d'autant plus que M. Borel, loin de le laisser dans l'abstrait, l'illustre élégamment en analysant la transcendance des nombres e et π.

A. Buhl (Toulouse).

E. A. Fouët. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** — Deuxième édition. Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de XII-265 pages ; 9 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Le succès de cet ouvrage, signalé déjà lors de la publication de la seconde édition du tome premier[1], s'affirme plus que jamais tant par l'élégance que met l'auteur à rassembler les éléments essentiels de l'analyse actuelle que par le soin qu'il met à ne laisser échapper aucune publication utile au sujet, celle-ci étant au moins indiquée par une note en bas de page. Il serait difficile d'analyser cette seconde édition en citant seulement les adjonctions faites à la première, tant les remaniements sont importants. Il ne sera d'ailleurs pas superflu de suivre une nouvelle fois la pensée de l'auteur ; son but est assurément de mettre le lecteur à même de travailler dans l'analyse moderne sans l'obliger à se débrouiller dans le fatras des mémoires trop rigoureux. Aussi, après une étude des fonctions uniformes, puis des procédés susceptibles d'uniformiser les fonctions multiformes (transformations diverses, usage des surfaces de Riemann), il aborde la notion de série envisagée des différents points de vue d'où elle peut servir

[1] Voir l'analyse de ce tome dans l'*Enseign. math.*, t. X, p. 352, 1908.

à *définir* la fonction. Pour les séries entières, le plus grand soin est attaché au mode de croissance des coefficients (lemmes de Cauchy, Hadamard, Borel), ce qui n'empêche nullement d'obtenir certains développements de manière rapide et élégante quand les théorèmes fondamentaux ont assuré la convergence et l'unicité du résultat.

Les séries qui peuvent utilement se substituer aux séries entières, sont étudiées ensuite. La première place appartient sans doute aux séries trigonométriques ; il faut leur ajouter toutes les expressions qui se sont substituées aux précédentes séries quand elles ne convergeaient pas ; nous arrivons ainsi aux séries sommables et aux séries des polynômes analytiques dont on pressent l'existence, celle-ci devant être véritablement approfondie dans le tome suivant.

L'étude des transcendantes élémentaires est conduite avec une très grande facilité jusqu'aux fonctions eulériennes et jusqu'à la série hypergéométrique à laquelle se rattachent immédiatement les fonctions sphériques et cylindriques ; quant à la représentation sous forme de produits de celles des fonctions précédentes qui sont entières, j'aurais à peine besoin de le mentionner si ceci ne m'amenait à signaler par contraste de bien curieux produits pour les fonctions inverses telles que le logarithme et l'arc cosinus ; je les ignorais totalement et j'imagine que bien des lecteurs dans mon cas ne les verront pas sans intérêt (p. 135).

Si la théorie des séries simples prépare admirablement les parties les plus élémentaires de la théorie des fonctions, on peut demander de même à celle des séries multiples de préparer des notions plus élevées telles que celles des fonctions thêta de Jacobi à une ou plusieurs variables. L'enchaînement est encore extrêmement remarquable et c'est avec moins de 60 pages que la théorie se développe et aboutit à des résultats aussi remarquables. Un dernier chapitre a trait aux fonctions définies par des intégrales ; les formules de Riemann et Green en sont les premiers éléments qui aboutissent au théorème de Cauchy avec toutes les précautions dont l'entoure M. Goursat. La notion d'intégrale est elle-même soigneusement étudiée avec les perfectionnements dus à Riemann, puis à MM. Darboux et Lebesgue. Combien fut judicieux et sûr le choix de l'auteur pour qu'il puisse nous présenter tant de choses ! Quelle finesse d'esprit n'a-t-il pas eu pour faire de chacun un petit bijou. A. BUHL (Toulouse).

H. POINCARÉ. — **Leçons de Mécanique céleste,** professées à la Sorbonne. — Tome III[1]. *Théorie des marées,* rédigée par E. Fichot, ingénieur-hydrographe de la marine. — 1 vol. gr. in-8° de 472 pages avec 67 figures et 2 cartes hors texte. Gauthier-Villars. Paris 1910.

Par rapport aux dimensions des océans, les marées sont des oscillations dont l'amplitude peut être considérée comme infiniment petite ; c'est pourquoi le présent volume débute par l'étude classique des petites oscillations d'un système mécanique. On sait que dans cette théorie on ne rencontre que des équations linéaires dont le premier membre détermine une oscillation *propre,* cependant que les termes du second membre, qui dépendent du potentiel perturbateur et peuvent être en nombre quelconque, déterminent des oscillations *contraintes.* Si parmi ces dernières il s'en trouve qui ont

---

[1] Voir dans l'*Enseign. math.* les analyses des tomes I (T. VIII, 1906, p. 248) et II (T. XI, 1909, p. 231).