H. Poincaré. —Leçons de Mécanique céleste, professées à la Sorbonne.— Tome III 1. Théorie des marées, rédigée par E. Fichot, ingénieur-hydrographe de la marine. — 1 vol. gr. in-8° de 472 pages avec 67 figures et 2 cartes hors texte. Gauthier-Villars. Pa...

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

à *définir* la fonction. Pour les séries entières, le plus grand soin est attaché au mode de croissance des coefficients (lemmes de Cauchy, Hadamard, Borel), ce qui n'empêche nullement d'obtenir certains développements de manière rapide et élégante quand les théorèmes fondamentaux ont assuré la convergence et l'unicité du résultat.

Les séries qui peuvent utilement se substituer aux séries entières, sont étudiées ensuite. La première place appartient sans doute aux séries trigonométriques ; il faut leur ajouter toutes les expressions qui se sont substituées aux précédentes séries quand elles ne convergeaient pas ; nous arrivons ainsi aux séries sommables et aux séries des polynômes analytiques dont on pressent l'existence, celle-ci devant être véritablement approfondie dans le tome suivant.

L'étude des transcendantes élémentaires est conduite avec une très grande facilité jusqu'aux fonctions eulériennes et jusqu'à la série hypergéométrique à laquelle se rattachent immédiatement les fonctions sphériques et cylindriques ; quant à la représentation sous forme de produits de celles des fonctions précédentes qui sont entières, j'aurais à peine besoin de le mentionner si ceci ne m'amenait à signaler par contraste de bien curieux produits pour les fonctions inverses telles que le logarithme et l'arc cosinus ; je les ignorais totalement et j'imagine que bien des lecteurs dans mon cas ne les verront pas sans intérêt (p. 135).

Si la théorie des séries simples prépare admirablement les parties les plus élémentaires de la théorie des fonctions, on peut demander de même à celle des séries multiples de préparer des notions plus élevées telles que celles des fonctions thêta de Jacobi à une ou plusieurs variables. L'enchaînement est encore extrêmement remarquable et c'est avec moins de 60 pages que la théorie se développe et aboutit à des résultats aussi remarquables. Un dernier chapitre a trait aux fonctions définies par des intégrales ; les formules de Riemann et Green en sont les premiers éléments qui aboutissent au théorème de Cauchy avec toutes les précautions dont l'entoure M. Goursat. La notion d'intégrale est elle-même soigneusement étudiée avec les perfectionnements dus à Riemann, puis à MM. Darboux et Lebesgue. Combien fut judicieux et sûr le choix de l'auteur pour qu'il puisse nous présenter tant de choses ! Quelle finesse d'esprit n'a-t-il pas eu pour faire de chacun un petit bijou. A. BUHL (Toulouse).

H. POINCARÉ. — **Leçons de Mécanique céleste,** professées à la Sorbonne. — Tome III[1]. *Théorie des marées,* rédigée par E. Fichot, ingénieur-hydrographe de la marine. — 1 vol. gr. in-8° de 472 pages avec 67 figures et 2 cartes hors texte. Gauthier-Villars. Paris 1910.

Par rapport aux dimensions des océans, les marées sont des oscillations dont l'amplitude peut être considérée comme infiniment petite ; c'est pourquoi le présent volume débute par l'étude classique des petites oscillations d'un système mécanique. On sait que dans cette théorie on ne rencontre que des équations linéaires dont le premier membre détermine une oscillation *propre,* cependant que les termes du second membre, qui dépendent du potentiel perturbateur et peuvent être en nombre quelconque, déterminent des oscillations *contraintes*. Si parmi ces dernières il s'en trouve qui ont

---

[1] Voir dans l'*Enseign. math.* les analyses des tomes I (T. VIII, 1906, p. 248) et II (T. XI, 1909, p. 231).

même période que l'oscillation propre, il y a *résonance*, et c'est précisément le rôle capital de la résonance que M. Poincaré cherche immédiatement à mettre en lumière.

Ces préliminaires étant établis, on peut passer du système de points matériels au cas du milieu continu ; les sigmas se remplacent par des intégrales.

Les premières marées proprement dites dont l'étude vient d'abord, sont les marées à très longue période qui ont d'ailleurs pour cas-limite les marées purement statiques, mais, dans ce domaine, la simplicité n'est pas aussi grande qu'on l'a cru pendant longtemps. Un astronome de l'Observatoire du Cap, M. Hough, a étudié l'influence du frottement d'une manière qui conduit maintenant à diviser les marées statiques en deux sortes ; la première sorte répond à l'ancienne idée d'équilibre, mais, dans les marées de la seconde sorte, l'équilibre n'est qu'apparent, la masse pouvant être parcourue par des courants n'altérant pas l'état de la surface.

Quant à l'étude des marées dynamiques, elle est savamment divisée en plusieurs étapes. Nous partons d'abord d'un simple problème d'hydrodynamique, à apparence très classique, dans lequel il ne s'agit que des oscillations d'un liquide pesant dans un vase fixe ; on passe ensuite au cas où ce liquide recouvre une sphère non tournante, puis une sphère tournante. Le cas général est ainsi préparé par des théories qui ne se compliquent que progressivement. Les célèbres résultats dus à Laplace ont été complétés par M. Hough, dont les travaux sont habilement résumés par M. Poincaré ; ils permettent aussi de revenir sur les marées statiques et de décider définitivement de l'influence du frottement quant à la classification de la marée dans l'une des sortes mentionnées plus haut.

Enfin, si le cas naturel est excessivement compliqué, il ne faut pas oublier qu'il est compris entre le cas limite où la mer recouvrirait toute une sphère et celui où l'eau ne serait emprisonnée que dans des canaux étroits. Ces deux cas-limites admettent des théories suffisamment complètes permettant de pousser les calculs jusqu'au bout, et leur développement, effectué par M. Poincaré, est certainement ce qu'il y a de mieux pour arriver à se faire une idée du phénomène réel.

Tout ce qui précède peut n'être considéré, si l'on veut, que comme un perfectionnement des méthodes anciennes. Au contraire, une nouveauté d'un intérêt capital est constituée par l'application de la méthode de Fredholm à l'intégration des équations aux dérivées partielles du problème des marées. M. Poincaré rappelle brièvement en quoi consiste cette méthode ; il l'applique à quelques problèmes tels que celui de Dirichlet, lesquels — quelle ironie ! — semblent très simples à côté de ceux qu'il faudrait résoudre maintenant. Il expose ses propres travaux et perfectionne en des points très importants une méthode qui, malgré son caractère général, ne s'appliquait pas aux marées sans de profondes modifications. Il expose aussi la méthode de Ritz, fondée sur le calcul des variations, laquelle, convenablement perfectionnée, rendrait peut-être des services analogues à celle de Fredholm. Sans doute, ces méthodes sont surtout théoriques ; on se demande quelle fonction on pourrait bien y introduire pour représenter, par exemple, la profondeur de la mer, mais, là encore, l'intérêt n'est probablement pas du côté de l'excessive généralité. Il ne faut pas oublier que les résultats les plus élégants obtenus jusqu'ici correspondent au cas de la profondeur constante ou fonction de la seule latitude. Et de tels résultats ont encore bien besoin de compléments ou même de démonstrations véritablement rigoureuses ; c'est là surtout ce qu'il faut commencer par demander aux méthodes nouvelles.

Le nouvel ouvrage de M. Poincaré est divisé en cinq parties ; tout ce que je viens de dire concerne la première qui est de beaucoup la plus importante. Les autres n'en sont que des compléments qu'on peut analyser plus rapidement.

La seconde partie traite des méthodes pratiques de prédiction des marées. C'est l'analyse harmonique de Laplace qui consiste à ne demander à la théorie que la forme analytique du résultat. Les constantes qui y figurent sont déterminées par l'observation. Il y a là un procédé qu'on retrouve en astronomie dans beaucoup d'autres cas (par exemple dans l'étude de la réfraction) ; ici il est assez curieux, surtout à cause des dispositions cinématiques imaginées pour profiter des indications des marégraphes avec économie de calculs.

La troisième partie fait une synthèse des observations et les compare avec la théorie. Il y a là l'étude géographique des marées et celles des oscillations propres produites artificiellement dans de petits bassins dont on peut faire varier la forme. Ici se placent aussi les fort belles planches jointes à l'ouvrage. Ce sont des planisphères indiquant la distribution des marées semi-diurnes, et celles des lignes *cotidales* (lieu des points où la marée se produit à la même heure).

La quatrième partie traite des marées fluviales. Si l'on suppose les déplacements très petits et le frottement négligeable, la marée fluviale est régie par l'équation des cordes vibrantes, mais ce cas est trop simple pour donner quoi que ce soit qui coïncide avec l'observation. En deuxième approximation on néglige le frottement qui correspond à une onde principale, mais en le faisant intervenir sur une grande longueur de fleuve de manière à éteindre une onde parasite. Alors apparaît une explication assez satisfaisante pour le mascaret. En troisième approximation, il faut maintenir le frottement, mais, si l'on se borne alors aux petits déplacements, on tombe sur l'équation des télégraphistes.

La cinquième et dernière partie de l'ouvrage a trait à l'influence des marées sur la rotation des astres. Nous y trouvons notamment la question de la rotation lunaire et celle, probablement analogue, qui porte à croire que Mercure et Vénus ont un jour sidéral égal à l'année solaire. J'insiste, avant de terminer, sur la rédaction extrêmement soignée et consciencieuse due à M. Fichot ; il est même hors de doute que, dans les parties pratiques, il a adjoint toute son expérience d'hydrographe à la haute science de M. Poincaré.

A. Buhl (Toulouse).

C. Riquier. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** — 1 vol. gr. in-8° de XXVII-590 pages avec figures : 20 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Voici un ouvrage qui, par son esprit, doit s'imposer à l'attention des géomètres. On sait les extraordinaires difficultés rencontrées dans l'étude des équations aux dérivées partielles ; ces difficultés entraînèrent une limitation des problèmes et, comme ceux de la physique mathématique n'exigeaient que la considération des cas où les variables étaient réelles, le point de vue analytique pur se trouva délaissé. C'est surtout ce point de vue qui est repris aujourd'hui par M. Riquier. Dirigé dans cette voie par les tra-