II. — Le nombre des éléments fixes servant à construire tout le système.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Mais ici encore, il faut dire qu'aucune base ne peut satisfaire à toutes les exigences, car elle devrait contenir comme facteurs premiers les nombres 2, 3, 5, 7, 11,... ; c'est dire qu'elle devrait être très grande, et nous verrons plus loin que de telles bases sont impossibles. Quel que soit donc le choix auquel on s'arrête, les développements infinis se présenteront toujours dans un grand nombre de cas.

Le résultat le plus certain auquel on arrive en partant de ce point de vue, c'est que la base du système de numération doit être *un nombre pair*. En effet : le nombre 2 se distingue de tous les autres par tant de propriétés remarquables, le nombre 2 figure si souvent dans les formules théoriques, il entre si souvent comme diviseur dans les calculs de la pratique que toute base impaire entraînerait des désavantages très sensibles.

Doit-on préférer une base renfermant, à côté du nombre 2, le facteur premier 3 ou plutôt le facteur premier 5 ? ou bien une base renfermant une puissance de 2 supérieure à la première ? ou, à côté de 2^n, une puissance supérieure d'un autre facteur premier ? Devrait-on, par exemple, préférer 18 ou 24 à 12 ? ou bien 20 à 10 ? Il est bien difficile de trancher de telles questions à priori, si l'on voulait tenir compte *uniquement* de la divisibilité.

Si ces considérations devaient décider à elles seules du choix d'une base, le système par 6 ou par 12 réunirait sans doute une majorité ; mais il y aurait probablement une très forte minorité pour faire observer combien les avantages que le meilleur des systèmes présente sur ses concurrents ont peu de valeur.

En se plaçant uniquement au point de vue de la divisibilité, on arrive ainsi finalement à la conclusion suivante : *La base b du système de numération doit être un nombre pair en tout cas, un nombre à beaucoup de diviseurs, un nombre contenant le plus possible de facteurs premiers.* — Ce premier point de vue est donc favorable aux grandes bases.

II. — Le nombre des éléments fixes servant à construire tout le système.

Nous venons de montrer que les considérations de divisibilité militent en faveur d'un grand nombre pair, mais qu'elles laissent encore beaucoup de place à l'arbitraire, qu'elles sont loin de donner à notre question une réponse univoque et décisive ; il faut donc considérer encore d'autres moments, entre autres le nombre des éléments fixes qui servent à la construction même du système.

Nous posons comme principe que *ce nombre doit être aussi restreint que possible.* — Il y a de nouveau lieu de distinguer entre la numération parlée et la numération écrite.

a). — *L'expression verbale des nombres.* — Comme nous l'avons rappelé plus haut, on doit inventer un nom spécial d'abord pour chaque unité simple 1, 2, 3..... (b-1), ensuite pour chacune des unités des différents ordres : b, b^2, b^3, b^4..... L'on voit immédiatement que le nombre de ces noms primitifs au moyen desquels on compose celui de tous les autres nombres dépend de la limite jusqu'à laquelle on veut pousser la numération, et qu'il augmente indéfiniment avec cette limite ; il dépend en outre de la base ; si celle-ci est petite, par exemple, il faut avoir à disposition peu de noms seulement pour les unités simples, mais davantage pour les puissances de la base. Il y a là deux facteurs dont l'un tend à diminuer, l'autre à augmenter le nombre de noms nécessaires.

Prenons comme exemple le système binaire ou dyadique et supposons qu'on veuille pousser la numération jusqu'à mille ; on aura besoin de noms spéciaux pour les nombres suivants : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, donc de 10 noms. Pour compter jusqu'à 1000 dans le système quaternaire, il faut des noms pour 1, 2, 3, 4, 16, 64, 256, donc 7 noms en tout, puisqu'à l'aide du schéma

$$a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 + a_4 \cdot 4^4$$

on est alors en état de composer le nom de tous les nombres jusqu'à 1000 (et même jusqu'à 1023). Dans notre système décimal, on a besoin de 12 noms, savoir 9 pour les unités simples, puis dix, cent, mille, si l'on veut pouvoir compter jusqu'à mille. En poursuivant de cette façon l'idée, on arrive au tableau suivant donnant le *nombre des noms nécessaires* pour former un système de numération parlée,

la base du système étant

La numération étant poussée jusqu'à	2	3	4	5	6	8	10	12	16	20	24	30	60	100	......
10^3	10	8	7	8	8	10	12	13	17	21	25	31	60	100	......
10^6	20	14	12	12	12	13	15	16	19	23	27	33	62	102	......
10^9	30	20	17	16	16	16	18	19	22	25	29	35	64	103	......
10^{12}	40	27	22	21	20	20	21	22	24	28	31	37	65	105	......
10^{18}	60	39	32	29	28	26	27	27	29	32	36	41	69	108	......
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	......

Il serait facile d'étendre ce tableau, et si nous ne l'avons pas fait, c'est parce qu'on n'a pour ainsi dire jamais occasion ou besoin, dans la vie pratique, d'énoncer des nombres supérieurs au milliard, encore moins des nombres au delà de 10^{18}. Il ressort donc du tableau ci-dessus que pour employer le minimum de noms dans la numération *parlée*, on devrait arrêter le choix de la base à l'un des nombres 4, 6, 8 ou 10 (puisque les nombres impairs sont à exclure comme bases).

b). — *L'expression écrite des nombres.* — Plus la base d'un système numéral est grande, moins il faut de chiffres pour écrire un nombre donné. Les calculateurs appuieront toujours sur ce fait, car il constitue un très grand avantage des systèmes à grande base puisque, dans ces derniers, tous les calculs peuvent s'effectuer en un nombre moins grand d'opérations.

Cherchons à évaluer numériquement cet avantage des grandes bases et, dans ce but, considérons un nombre entier n, choisi à volonté, mais fixe.

Supposons que dans le premier système, à base b, il faille β chiffres pour représenter le nombre n. Si le premier chiffre est 1 et tous les autres zéro, on obtiendra $b^{\beta-1}$. C'est le plus petit des nombres à β chiffres. Le plus grand est égal à $b^{\beta} - 1$.

Les inégalités suivantes ont donc lieu :

$$b^{\beta-1} < n < b^{\beta} .$$

Quel que soit n, il existera par conséquent une grandeur non négative ε_1, moindre que l'unité, et telle que

$$n = b^{\beta-1+\varepsilon_1} , \quad 0 \leq \varepsilon_1 < 1 .$$

Supposons maintenant que dans un deuxième système de numération, dont la base soit a, il faille α chiffres pour représenter le même nombre n. Celui-ci sera au minimum $a^{\alpha-1}$, au maximum $a^{\alpha} - 1$, d'où les inégalités

$$a^{\alpha-1} \leq n < a^{\alpha} .$$

Il existera donc une quantité ε, non négative et moindre que l'unité et telle, que

$$n = a^{\alpha-1+\varepsilon} , \quad \text{avec la condition } 0 \leq \varepsilon < 1 .$$

Nous pouvons donc poser l'égalité :

$$a^{\alpha-1+\varepsilon} = b^{\beta-1+\varepsilon_1}$$

d'où

$$(\alpha - 1 + \varepsilon) \log a = (\beta - 1 + \varepsilon_1) \log b$$

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\beta - 1 + \varepsilon_1}{\alpha - 1 + \varepsilon} .$$

Les quantités $(-1 + \varepsilon_1)$ et $(-1 + \varepsilon)$ étant en valeur absolue moindres que l'unité, le rapport ci-dessus peut être, en moyenne, égalé à $\frac{\beta}{\alpha}$; il n'en diffère que d'une quantité négligeable, surtout lorsque β et α ne sont pas très petits. L'égalité ci-dessus exprime le théorème suivant : *le nombre des chiffres nécessaires pour représenter un nombre donné diminue en raison inverse du logarithme de la base.* Autrement dit : si l'on représente un même nombre n une première fois au moyen de α chiffres dans un système à base a, une deuxième fois au moyen de β chiffres dans un système à base b, une troisième fois au moyen de γ chiffres dans un système à base c, etc., on aura, en moyenne, les égalités

$$\alpha \cdot \log a = \beta \cdot \log b = \gamma \cdot \log c = \text{constante.}$$

L'égalité : $\beta \log b =$ constante montre clairement que le nombre des chiffres diminue à mesure que la base augmente, mais elle montre aussi que cette diminution est très lente ; on sait en effet que la fonction logarithmique croît avec l'argument, même au delà de toute limite, mais moins rapidement que n'importe quelle puissance. Ce fait est illustré par le petit tableau suivant qui donne le nombre des chiffres nécessaires pour écrire un nombre n qui a six chiffres dans notre système décimal :

$$100000 \leqq n \leqq 999999 .$$

Pour écrire ce même nombre n,

	la base du système étant									
	2	3	4	6	8	10	16	32	100	1000	1000000
il faut un nombre de chiffres égal à	17 à 20	11 à 13	9 à 10	7 à 8	6 à 7	6	5	4	3	2	1

En partant uniquement de ce point de vue, on arrive ainsi à la conclusion : la base b doit être aussi grande que possible.