Sur le principe d'induction complète.

Autor(en): **Combebiac, G.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur le principe d'induction complète.

Au moment où j'ai écrit la Note insérée dans le numéro de novembre 1909 de l'*Enseignement*, j'ignorais que la question avait déjà été résolue par M. Zermelo de la façon la plus heureuse dans les *Acta mathematica* (Tome XXXII, fasc. 2, p. 185).

M. Zermelo ne prend pas, il est vrai, le principe de l'induction complète comme élément de définition pour le type ordinal ω; mais il rapporte ce principe à une propriété exactement équivalente des ensembles ordonnés de ce type, savoir celle de constituer des « chaînes simples », c'est-à-dire de ne pouvoir être divisés en parties « séparées », deux parties étant dites séparées lorsqu'aucun des éléments de l'une n'a son image (l'élément qui le suit immédiatement) dans l'autre et réciproquement.

Cette notion d'enchaînement et celle d'induction complète se rapportent uniquement aux ensembles ordonnés ayant un premier élément et dans lesquels à tout élément en correspond un autre qui le suit immédiatement. Si un tel ensemble M est divisé en parties séparées, chacune de celles-ci contient les images de tous ses éléments, puisque ces images ne peuvent, d'après la définition même des parties séparées, appartenir à d'autres parties. Celle de ces parties M_0 qui contient l'élément initial devrait donc, si M satisfaisait au principe d'induction complète, être identique à M, qui ne pourrait donc pas être divisé en parties séparées.

M. Zermelo donne de la réciproque la démonstration suivante :

Les parties M_1 de M qui contiennent l'élément initial e et l'image de chacun de leurs éléments ont une partie commune M_0 qui possède les propriétés suivantes : 1° M_0 figure parmi les ensembles M_1; car il contient e et les images de tous ses éléments, puisque tout élément a de M_0 appartient à tous les M_1 et, par suite, il en est de même de son image a', qui appartient donc bien à la partie commune M_0; 2° à l'exception de e, tout élément de M_0 est l'image d'un élément de cet ensemble; sans cela, en supprimant un élément en M_0 on obtiendrait un ensemble M_1, ce qui est contraire à la définition de M_0.

Si M_0 ne se confond pas avec M, soit $R = M - M_0$ l'ensemble complémentaire. Il résulte des propriétés de M_0 qu'aucun élément de M_0 ne peut être l'image d'un élément de R et réciproquement, c'est-à-dire que les parties M_0 et R sont séparées. Par conséquent, lorsque M ne peut être divisé en parties séparées, M_0 se confond avec M et il en est par suite de même de tout ensemble M_1, c'est-à-dire que le principe d'induction complète est satisfait.

On peut encore donner une autre forme au principe d'induction complète. Si l'on appelle « segment » d'un ensemble ordonné un sous-ensemble contenant tous les éléments qui précèdent ses éléments, on reconnaît facilement que, pour un ensemble ordonné M ayant un premier élément et dans lequel tout élément a un suivant immédiat, un segment est un sous-ensemble qui contient l'élément initial et les suivants de tous ses éléments à l'exception du dernier s'il en existe un. Dès lors il est clair que l'induction complète équivaut à la propriété suivante : *tout segment de* M *qui n'est pas identique à l'ensemble total a un dernier élément.*

Il reste à démontrer que l'ensemble des nombres entiers finis ordonné suivant les grandeurs est du type ordinal ω. C'est ce que fait M. Zermelo en définissant ces nombres comme puissances ou nombres cardinaux des ensembles finis, ceux-ci étant eux-mêmes définis par la propriété de pouvoir être « doublement bien ordonnés » ; un ensemble ordonné est dit doublement bien ordonné si tout sous-ensemble a à la fois un premier et un dernier élément. Les types de ces ensembles sont évidemment les segments du type ω.

La question du principe de l'induction complète se trouve bien ainsi définitivement résolue, et cela dans la voie qu'indiquait déjà le bon sens.

G. Combebiac (Limoges).