raux de la Thermodynamique et montre comment on tire de ces principes les fondements d'une Mécanique chimique ; puis il présente chacun des principaux chapitres de cette Mécanique chimique. Il a soin de faire un appel aussi rare que possible aux formules mathématiques, même les plus simples, et de donner, en revanche, un très grand nombre d'exemples fournis par l'expérience.

Mais si le plan de l'ouvrage n'a pas changé, les matières que ce plan sert à ordonner ont été grandement accrues ; plus de 70 articles nouveaux sont venus s'adjoindre à ceux que contenait la première édition.

Ces additions nombreuses ont eu pour objet de tenir compte des plus récentes acquisitions de la Chimie physique ; à cet égard, l'auteur n'a rien négligé pour tenir son livre au courant même des recherches qui ont paru au cours de l'impression ; telle note, publiée en janvier 1910, s'y trouve analysée.

Mais plusieurs développements nouveaux ont eu surtout pour but de présenter d'une manière plus complète certaines questions que les nouveaux programmes ont introduites dans l'enseignement secondaire ; tels sont, par exemple, les articles consacrés à la dégradation de l'énergie.

Nous tenons à rappeler pour terminer que c'est M. Duhem qui a publié en France le premier ouvrage sur la Mécanique chimique. C'est en 1886 lorsqu'il était encore élève à l'Ecole normale qu'il fit paraître : *Le Potentiel thermodynamique et ses applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques.* Dans cet Ouvrage aujourd'hui fort rare malgré ses deux éditions, il faisait connaître les travaux si remarquables de Gibbs, alors complètement inconnu en France. Depuis il a publié sur la Mécanique chimique un grand nombre d'ouvrages et de mémoires C'est donc le fruit de 25 ans de travaux ininterrompus qu'il expose aujourd'hui dans cette nouvelle édition.

J. Hadamard. — **Leçons sur le Calcul des Variations.** *Tome premier :* La variation première et les conditions du premier ordre ; les conditions de l'extremum libre. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p., 18 fr. ; Hermann & fils, Paris.

Comme je l'ai dit un peu plus haut, en analysant le livre de M. Bolza dont la traduction allemande n'a précédé la publication de celui-ci que de fort peu, nous sommes maintenant en présence de grands ouvrages sur une branche des Mathématiques qu'illustra Weierstrass en des mémoires malheureusement difficiles à lire et que Kneser bâtit provisoirement de manière didactique en un livre qui peut être considéré comme le germe des puissantes publications de l'heure présente. A proprement parler, M. Hadamard ne cherche ni à refaire l'œuvre de Kneser, ni à se superposer à celle de Bolza. Les élégants et innombrables problèmes rattachés à l'Analyse classique le tentent moins que ceux qui peuvent naître d'un examen attentif et prévoyant des bases du sujet en litige. A cet égard, il ouvre devant nous des horizons indéfinis. Que l'on pense, par exemple, aux développements déjà prodigieux nés de certains problèmes tels que celui des lignes géodésiques ou celui des surfaces minima ; il n'en est pas moins vrai que ce sont des problèmes particuliers pour le Calcul des Variations. Or, si ce calcul lui-même a pour objet de rechercher les extrema *d'intégrales* dépendant de fonctions arbitraires, pourquoi parler seulement d'intégrales ? N'y a-t-il pas d'autres expressions fonctionnelles que les intégrales dont on peut étudier les modifications dans le *champ fonctionnel ?* Ainsi le Calcul des Variations ne sera que la première marche pour entrer dans le temple, à architecture encore indécise, du Calcul fonctionnel. Que ne faut-il pas conclure de l'avenir et de la puissance de celui-ci si des problèmes célèbres y disparaissent en prenant des dimensions minuscules.

M. Hadamard, dans ce beau livre, arrive à rassembler rapidement des résultats illustres souvent considérés de manières disparates. Dans l'un de ses premiers chapitres il rattache immédiatement la variation de l'action hamiltonienne aux équations de la Dynamique et observe que cette transformation bien connue peut être répétée pour des variations premières beaucoup plus générales. Il met alors les équations du Calcul des Variations sous la forme canonique et, comme cette dernière est la source de tous les admirables résultats de la Dynamique moderne et particulièrement de la Mécanique Céleste, il nous montre que le Calcul des Variations peut profiter de ceux-ci.

Au sujet des problèmes isopérimétriques (exemples immédiats d'extrema liés), M. Hadamard semble ne pas autant tenir que M. Bolza à placer dans le Calcul des cloisons qui ne sauraient être étanches, mais serviraient cependant à la classification des problèmes. Il a pris les choses d'une manière tellement générale qu'il domine tout ; il s'efforce ici de préciser les conditions où justement on pourra raisonner sur l'extremum lié comme sur l'extremum libre ; il prendra pour s'expliquer les élégantes propriétés des géodésiques, puis des fils pesants glissants sur des surfaces. Sous le titre de *problème de Mayer,* il généralise le problème de Lagrange, se heurte à des cas d'extrema liés où l'on croit ne plus pouvoir mettre les équations des extrémales sous forme canonique mais y arrive tout de même par l'usage de certaines transformations de contact.

Nous pouvons maintenant passer dans le Calcul fonctionnel général. Il n'y a pas, encore une fois, que les intégrales dont on cherche les extrema qui dépendent de fonctions arbitraires. Ainsi les problèmes de la Physique mathématique conduisent à chercher des fonctions qui, de par les conditions aux limites, dépendent de fonctions arbitraires : ce sont des *fonctionnelles* de celles-ci. Les fonctionnelles *continues* sont celles qui ne se modifient qu'infiniment peu quand on ne modifie qu'infiniment peu les fonctions dont elles dépendent ; on pressent alors, avec M. Volterra, les notions de *dérivée* ou de *différentielle fonctionnelles.* Seulement, pour que subsiste le parallélisme avec le Calcul infinitésimal ordinaire, il faut que la variation fonctionnelle dépende *linéairement* de variation de fonctions, tout comme une différentielle totale dépend linéairement des différentielles des variables. De là l'importante notion de *fonctionnelle linéaire.* M. Hadamard illustre ces définitions en revenant sur les fonctions de Green, de Neumann, etc..... ainsi que sur les problèmes déjà étudiés dans ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.*

Quant aux conditions qui permettent de choisir parmi les extrémales pour assurer définitivement les extrema, conditions dont l'obtention exige l'examen de la variation seconde, nous retrouvons un ordre à peu près analogue à celui décrit plus haut à propos de l'ouvrage de M. Bolza ; les noms et les théories de Legendre, Jacobi, Weierstrass, Darboux, etc. ne pouvaient pas ne pas revenir. Weierstrass surtout semble apporter l'extrême rigueur et M. Darboux, par des voies différentes et en étudiant surtout les géodésiques, apporte parallèlement l'élégance. D'ailleurs l'esprit analytique de M. Hadamard ne s'est pas refusé aux schèmes géométriques qui montrent intuitivement de curieuses difficultés et d'intéressants paradoxes. Si j'ajoute que les notions d'équations aux variations et d'invariants intégraux qui jouent un rôle si considérable dans les travaux de M. Poincaré sont aussi rattachées au Calcul ici présenté, j'aurai donné de l'œuvre une idée qui, quoique fort incomplète, montre assez le rôle capital qu'elle est appelée à jouer dans la Science. A. BUHL (Toulouse).

K. HENSEL. — **Theorie der algebraischen Zahlen,** Band I. — 1 vol. in-8° de XI-349 pages, 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'attention des plus grands géomètres de toutes les époques a toujours été retenue par les belles propriétés des nombres, mais ce n'est qu'avec Gauss qu'a commencé l'exploration pour ainsi dire systématique des lois auxquelles ils sont assujettis. Les recherches de Gauss lui-même sur les résidus biquadratiques furent la suite naturelle des mémorables *Disquisitiones arithmeticae,* comme plus tard aussi celles de Kummer relatives aux équations de la division du cercle. La théorie des résidus biquadratiques ne prit une forme satisfaisante que lorsque Gauss eut fait entrer dans le champ de ses considérations les quantités rationnelles complexes de la forme $a + bi$, tandis que Kummer ne put étendre aux corps de nombres dont il s'occupait la proposition fondamentale de l'arithmétique élémentaire qui dit que tout nombre entier n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de facteurs premiers, que par l'introduction de ses nombres idéaux.

Dedekind, Kronecker puis Hensel ont ensuite donné des méthodes permettant d'étendre à un corps algébrique quelconque toutes les merveilleuses lois mises en évidence par Gauss dans ses *Disquisitiones.* Leurs recherches, tout à fait indépendantes, ont conduit, ainsi que cela devait être, aux mêmes résultats. Considérées les unes à côté des autres, elles s'expliquent mutuellement et à cause de la différence de leur point de départ jettent un jour fort net sur la nature du nombre en général. Ceci s'applique entre autres aux conceptions fondamentales de Dedekind et de Hensel. Les idéaux du premier ont leur raison d'être dans les diviseurs du second, diviseurs dont ils sont cependant, et en une certaine mesure, la réalisation concrète.

Le livre dont nous donnons ici l'analyse est le fruit de dix-huit années de travail. Les méthodes qu'on y rencontre s'appuient sur une généralisation hardie du concept de nombre. A côté des nombres rationnels ordinaires et des nombres algébriques proprement dits, M. Hensel introduit de nouveaux éléments, constitués par des suites *indéfinies,* le plus souvent divergentes :

$$(1) \qquad A = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} e_\nu p^\nu \qquad \text{et (2)} \qquad B = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu \pi^\nu .$$

Le terme « *Nombre-à-base-*p » les caractérisent entièrement[1].

Dans les A, qui seront appelés « Nombres-à-base-p rationnels » les coefficients e_ν sont des nombres rationnels quelconques. Ces e_ν sont astreints à la seule condition d'être entiers par rapport à p, c'est-à-dire d'être des nombres dont le dénominateur, dans l'expression réduite, n'est pas divisible

[1] Voir la note bibliographique consacrée par M. HADAMARD au livre dont il s'agit ici. *Revue générale des Sciences,* Année 1909, p. 961. Le terme « *Nombre-à-base-*p » (Nombre écrit avec une majuscule) est la traduction par M. Hadamard de celui de « p-*adische Zahl* » adopté par M. Hensel.