SUR L'USAGE DES MATRICES DANS L'ÉTUDE DES CONGRUENCES DE DROITES

Nous voudrions appeler l'attention sur certaines matrices fonctionnelles introduites par M. L. Godeaux dans divers articles dont on trouvera plus loin les titres et dont l'un a paru dans l'*Enseignement mathématique*. Les matrices en question, et d'autres analogues, égalées à zéro, représentent des congruences de droites; nous tâcherons de creuser un peu leur étude. En même temps les réflexions qu'elles suggèrent s'étendent à des sujets plus vastes, ce qui explique le titre du présent travail. Toutefois nous ne pouvons guère que signaler les questions apparentées; ce que nous en dirons ne sera donc ni bien profond, ni même bien neuf. Si, malgré cela, les pages qui vont suivre présentent quelque intérêt, c'est, au moins en partie, un intérêt pédagogique; voilà pourquoi nous avons tenu à soumettre nos observations aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique*.

1. — Soient

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \ ,$$

$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

les équations d'une droite en coordonnées homogènes. Si les coefficients a_i et b_i sont fonctions d'un paramètre, donc liés à ce paramètre par six équations homogènes à la fois en a_i et b_i, ou liés à n paramètres par $n + 5$ relations pareilles, la droite engendre en général une *surface réglée* dont l'équation résulte de l'élimination des coefficients et des paramètres. Si les coefficients sont liés à n paramètres par $n + 4$ équations, la droite engendre une *congruence* dont on peut obtenir une représentation en éliminant les coefficients et $n - 1$ paramètres; la résultante contient encore un paramètre et représente ∞^1 surfaces réglées engendrées par les droites de la congruence. Enfin si les coefficients dépendent de trois paramètres, la droite engendre un *complexe*.

Pour représenter la droite, on peut d'ailleurs choisir deux autres plans tels que $\lambda a_x + \mu b_x = 0$, $\lambda' a_x + \mu' b_x = 0$ et disposer des rapports $\lambda : \mu$, $\lambda' : \mu'$, supposés distincts, de manière que ces plans passent, par exemple, chacun par un point fixe; cette simplification met en évidence le fait que la droite dépend de quatre constantes; elle permet donc de réduire, de deux unités, le nombre des relations dont il est parlé ci-dessus; ce nombre se réduit davantage si quelques-uns des coefficients jouent le rôle de paramètres. Dans le cas général même, ces relations en nombre réduit suffisent quand leur structure est telle que, si elles sont satisfaites par des coefficients a_i et b_i, elles le sont par $\lambda a_i + \mu b_i$ et $\lambda' a_i + \mu' b_i$, quels que soient les rapports distincts $\lambda : \mu$, $\lambda' : \mu'$; nous verrons plus loin des exemples de telles relations.

2. — Revenons au cas général, mais ne considérons que les congruences de droites et limitons-nous encore au cas où les coefficients sont liés aux n paramètres par $4 + n$ équations entières et homogènes en a_i et b_i.

L'*ordre* de la congruence s'obtient en regardant les x_i comme donnés et en résolvant le système des équations $a_x = 0$, $b_x = 0$, accompagnées des $4 + n$ conditions, par rapport aux six rapports mutuels des coefficients a_i et b_i, et aux n paramètres. Par exemple, si les coefficients sont fonctions linéaires de deux paramètres t, t', les équations de la droite (ab) prennent la forme

$$a'_x + ta''_x + t'a'''_x = 0\,, \qquad b'_x + tb''_x + t'b'''_x = 0\;;$$

la congruence, manifestement de premier ordre, est l'ensemble des bisécantes de la cubique gauche,

$$\left\| \begin{matrix} a'_x & a''_x & a'''_x \\ b'_x & b''_x & b'''_x \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

E. KUMMER[1] a donné la classification des congruences de premier ordre. On pourrait essayer de traiter cette question en analysant la représentation indiquée ci-dessus. Cette méthode serait probablement pénible, bien qu'il y ait moyen peut-être d'utiliser la remarque suivante. Les équations $a_x = 0$, $b_x = 0$ dont les coefficients sont, par exemple, des fonctions entières de deux paramètres, peuvent être remplacées par l'évanouissement de la matrice $\| a_x \; b_x \|$; celle-ci, à son tour, se remplace par

$$\begin{Vmatrix} a_x & b_x & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{ou par} \quad \begin{Vmatrix} a_x & b_x & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{Vmatrix}$$

et l'on dispose de α, β, γ de manière à diminuer, par soustraction de lignes ou de colonnes, les exposants affectant les paramètres ; en continuant ainsi, de proche en proche, on peut arriver à une matrice de l lignes et $l+1$ colonnes dont les éléments d'une ligne ou de deux colonnes contiennent les x au premier degré et dont les autres éléments sont indépendants des x, tandis que tous les coefficients sont fonctions linéaires des deux paramètres ou indépendants de ces paramètres.

La *classe* de la congruence s'obtient en considérant l'équation d'un plan u_x avec les équations de la congruence ; en exprimant les conditions pour que ces relations soient satisfaites par deux points x ; enfin en résolvant, par rapport à t et t', les deux égalités exprimant ces conditions. Par exemple la congruence des bisécantes d'une cubique gauche, signalée ci-dessus, a un rayon dans le plan u_x quand on a

$$\left\| a'_i + ta''_i + t'a'''_i \quad b'_i + tb''_i + t'b'''_i \quad u_i \right\| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et cette matrice s'annule en général pour *trois* systèmes de valeurs de t et t' [2].

En se laissant guider par la discussion des congruences

---

[1] *Academ. Berlin*, 1866.

[2] On vérifie que cette classe se réduit à la 2^me ou la 1^re si la matrice précédente s'annule identiquement pour *un* ou *deux* systèmes de valeurs t, t', par exemple pour $t = t' = 0$, ou pour $t = t' = 0$ en même temps que pour $t = 0$, $t' = \infty$; dans ces cas la cubique gauche dégénère en une droite et une conique ou en trois droites.

linéaires de cubiques gauches[1], discussion qui offre des analogies avec celle que nous esquissons ici, on rencontre encore le type suivant

$$\frac{a_x + ta'_x}{\alpha + t'\alpha'} = \frac{b_x + tb'_x}{\beta + t'\beta'} = \frac{c_x + tc'_x}{\gamma + t'\gamma'}$$

qui représente une congruence linéaire de droites s'appuyant, d'une part sur la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0 \ ,$$

d'autre part sur une bisécante de cette courbe,

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & \alpha & \beta \\ b_x & b'_x & \alpha' & \beta' \\ c_x & c'_x & \alpha'' & \beta'' \end{matrix} \right\| = 0 \ .$$

Evidemment cette congruence est de troisième classe, et l'on obtient de même une congruence de premier ordre et de classe n en considérant une courbe gauche de degré n rencontrant $n - 1$ fois une droite et en menant les rayons qui s'appuient sur cette courbe et sur cette droite.

Enfin le système très simple $ta_x = a'_x$, $t'b_x = b'_x$ représente les droites s'appuyant sur les deux directrices rectilignes (aa'), (bb').

3. — Parmi les manières de représenter une droite par une matrice, remarquons la suivante

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0 \ ;$$

cette notation fort usitée exprime que le point variable X est aligné sur les points x et y. Si les coordonnées de ces deux derniers points dépendent d'un, deux ou trois para-

[1] Voir M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, van Gœthem, 1908, p. 103.

mètres, on a respectivement une surface réglée, une congruence, un complexe. Notamment si les quantités x et y sont fonctions linéaires d'un paramètre, on a une quadrique. Si elles sont fonctions linéaires de deux paramètres t, t', on a une congruence du troisième ordre ; cette congruence est de première classe, car les points x et y sont dans un plan défini par trois points a, b, c quand ils annulent la matrice $\| a_i\, b_i\, c_i\, x_i\, y_i \|$ dont deux colonnes contiennent t, t' au premier degré, et cette matrice s'évanouit, en général, pour un seul système de valeurs de t et t'.

En passant signalons le cas où x et y se meuvent chacun dans un plan : prenons ces plans pour faces du tétraèdre de référence et écrivons par exemple

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Supposons ensuite le système plan $y_2 y_3 y_4$ rapporté au plan $x_1 x_2 x_3$ par une transformation rationnelle,

$$y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_2^{(n)} x : \varphi_3^{(n)} x : \varphi_4^{(n)} x \; ;$$

en faisant la substitution, on obtient une matrice où les rapports mutuels de x_1, x_2, x_3 jouent le rôle de paramètres. Elle représente une congruence ; par des procédés d'énumération connus, on constate que cette congruence est d'ordre $n^2 + n + 1$ et de classe n. Si la transformation est birationnelle, ses points fondamentaux amènent un abaissement de l'ordre de $n^2 - 1$ unités. On voit donc que la représentation par matrices convient pour les congruences que T.-A. Hirst appelle *crémoniennes* [1].

4. — La représentation du n° précédent suggère l'idée que voici. De même que les coefficients de l'équation d'une surface peuvent être pris pour coordonnées de cette surface,

---

[1] Voir T.-A. Hirst, *Proceedings of London mathem. society*, t. XIV, XVI, XVII ; et *Rendiconti d. circolo mat. Palermo*, t. I ; G. Bordiga, *Mém. in-4° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1909.

de même la matrice $\| x_i y_i \|$ peut jouer le rôle du système des coordonnées de la droite xy. Le développement de cette idée se poursuit de l'une des façons suivantes dont la première n'est qu'un cas particulier de l'autre.

Ou bien l'on prend pour coordonnées de la droite les six déterminants extraits de la matrice $\| x_i y_i \|$; c'est alors le système couramment usité des coordonnées pluckériennes homogènes. Mais cette représentation coïncide avec la représentation dualistique, d'où résulte que tout complexe a son ordre égal à sa classe ; donc aussi deux équations en coordonnées pluckériennes représentent en général une congruence dont l'ordre est égal à la classe.

Ou bien l'on considère une droite comme définie par deux groupes de coordonnées cogrédientes et l'on représente les systèmes de droites par des relations contenant ces deux groupes de coordonnées; seulement la structure de ces relations doit être telle que, si elles sont vérifiées par deux points x et y, elles le soient aussi par tout couple de points distincts $\lambda x + \mu y$, $\lambda' x + \mu' y$. Nous allons donner des exemples de relations pareilles[1].

Les plus simples de ces exemples manquent d'intérêt : les notations

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0 , \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent trop évidemment, la première le complexe spécial des rayons s'appuyant sur la droite (ab), la seconde la congruence des rayons issus du point (abc). Si les formes sont ternaires, la première notation représente, dans le plan, le faisceau de rayons issus du point (ab) ; la seconde ne représente généralement rien que le système illusoire $x \equiv y$, car si elle représentait une droite, celle-ci devrait contenir les trois sommets du triangle (abc).

Voici un autre exemple : le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_x^{(i)} & b_x^{(i)} & a_y^{(i)} & b_y^{(i)} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

---

[1] Voir J. Neuberg, Mathesis, 1902, p. 224, Th. Reye, *Journ. f. die reine u. angew. Math.*, t. 108, ainsi que les auteurs que nous citerons plus bas.

s'annule, dans l'espace, pour un complexe quadratique; car, pour y donné, on obtient une quadrique ayant y pour point double, donc un cône. Dans le domaine ternaire, à tout point y répond un couple de droites se croisant en ce point y; donc l'équation représente, dans le plan, les tangentes à une conique.

Nous avons déjà rencontré, dans des travaux antérieurs [1], des exemples de représentations pareilles. Le n° suivant sera consacré à un exemple général, d'une certaine portée, qui a déjà fait l'objet de plusieurs articles de L. GODEAUX [2] et dont nous avons parlé dans le préambule du présent travail.

5. — Utilisons, pour une forme d'ordre n à un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots$ et pour les formes polaires successives d'un élément $y_1, y_2, \ldots$ les notations symboliques habituelles $a_x^n, a_x^{n-1} a_y, a_x^{n-2} a_y^2, \ldots a_y^n$, et formons un tableau dont la première ligne comprend ces $n+1$ formes, tandis que les lignes suivantes sont composées de la même manière, chacune au moyen d'une forme $b_x^n, c_x^n, \ldots$ analogue à a_x^n. Nous obtenons, suivant le nombre des lignes, une matrice carrée ou rectangulaire qui reste inaltérée quand on remplace x ou y par $\lambda x + \mu y$, comme on le vérifie par soustraction de colonnes; cette matrice s'annule donc pour un système de droites, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace.

Soit d'abord le nombre m de lignes égal ou inférieur au nombre $n+1$ de colonnes: cherchons l'intersection d'une droite xy avec les hypersurfaces $a_x^n, b_x^n, \ldots$; nous aurons évidemment

$$\lambda^n a_x^n + \frac{n}{1} \lambda^{n-1} \mu a_x^{n-1} a_y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \lambda^{n-2} \mu^2 a_x^{n-2} a_y^2 + \ldots + \mu^n a_y^n = 0$$

et $m-1$ relations semblables; chacune de ces équations en $\lambda : \mu$ représente un groupe de n points sur la droite xy et,

[1] *Bulletin Acad. roy. Belgique*, mai 1907, pp. 475, 485, 532.

[2] *Bulletin Acad. roy. Belgique*, janvier 1907, *Nouvelles Annales de mathém.*, 1907; *Mém. de la Soc. des Sciences du Hainaut*, 1908; *Enseignement mathématique*, mars 1909.

pour que ces m groupes fassent partie d'une même involution I_n^{m-2}, il faut qu'il existe une même relation linéaire entre les coefficients de ces m équations ou que la matrice définie ci-dessus,

$$\left\|\begin{matrix} a_x^n & a_x^{n-1} a_y & a_x^{n-2} a_y^2 & \ldots & a_y^n \\ b_x^n & b_x^{n-1} b_y & b_x^{n-2} b_y^2 & \ldots & b_y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\|$$

s'annule. Ainsi l'évanouissement de cette matrice représente l'ensemble des droites qui coupent les m hypersurfaces suivant des groupes d'une involution I_n^{m-2}. Mais, lorsque cette matrice est nulle, une des hypersurfaces du système linéaire $\nu a_x^n + \nu' b_x^n + \ldots$ est coupée en $n+1$ points par la droite xy; donc on a aussi l'ensemble des droites qui se trouvent tout entières sur une des hypersurfaces de ce système linéaire.

Ces interprétations ne sont pas applicables sans modification quand le nombre m de lignes dépasse le nombre $n+1$ de colonnes, car alors les éléments des diverses colonnes de la matrice nulle ont $\infty^{m-(n+1)}$ relations linéaires, donc les droites xy sont alors celles qui se trouvent tout entières sur $\infty^{m-(n+1)}$ hypersurfaces du système $\Sigma\nu\alpha_x^n$. De plus, chaque déterminant à $n+1$ lignes extrait de la matrice montre que les groupes de n points de rencontre d'une droite xy avec $n+1$ quelconques des m hypersurfaces sont des groupes d'une involution I_n^{n-1}, donc tous ces m groupes font partie d'une telle involution.

6. — Eclaircissons ce qui précède par quelques exemples. Dans le plan, les formules

$$\left\|\begin{matrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \end{matrix}\right\| = 0$$

représentent (abstraction faite de la solution $x \equiv y$) les droites qui rencontrent deux coniques aux mêmes points (deux couples d'une involution I_2^0), c'est-à-dire les six droites faisant partie de coniques dégénérées du faisceau $a_x^2 + \lambda b_x^2$.

Lorsque les formes sont quaternaires, la matrice s'annule pour la congruence des droites qui coupent deux quadriques aux mêmes points, donc des bisécantes de leur courbe d'intersection. On connaît l'ordre et la classe de cette congruence, mais voici, pour le calcul de ces nombres, une méthode qui se prête à la généralisation [1].

Si y est donné, la matrice, à une seule série de variables x_1, x_2, x_3, x_4, s'annule pour une courbe du second degré; mais comme, d'après sa structure, elle s'annule pour un système de droites, elle représente deux droites par y et la congruence est du second ordre. Si x et y décrivent deux droites sans point commun, les x sont fonctions linéaires d'un paramètre μ et les y d'un paramètre ν, et, pour aucun système de valeurs de μ, ν, les points x et y ne coïncident; on peut supposer aussi que les points répondant à des valeurs infinies de μ et ν ne sont pas sur un rayon de la congruence étudiée; alors, abolissant la première ou la dernière colonne de la matrice, on a, en coordonnées cartésiennes μ, ν dans un plan, deux quartiques ayant chacune un point simple à l'infini sur un axe et un point triple à l'infini sur l'autre axe; ces points absorbent six intersections étrangères à la question, et l'on doit encore défalquer les points (μ, ν) qui annulent à la fois $a_x a_y$ et $b_x b_y$, c'est-à-dire, dans le plan des (μ, ν), les deux intersections à distance finie de deux hyperboles à asymptotes parallèles. La congruence a donc *huit* rayons qui s'appuient à la fois sur les deux supports considérés; lorsque ceux-ci tendent vers deux droites d'un même plan, deux de ces rayons passent par les points communs aux deux droites et les six autres sont dans le plan de ces droites. La congruence est donc de sixième classe.

Si l'on suppose $x_4 = 0$, on voit que la matrice de formes ternaires représente six droites dans un plan.

---

[1] Cette méthode a été employée par L. GODEAUX pour n quelconque (*Enseign. math.*, mars 1909), mais l'application est déparée par une faute d'impression.

7. — Ici se présente une circonstance curieuse.

Lorsque l'on a une matrice rectangulaire de formes à une seule série de variables, on peut la compléter par une ou plusieurs lignes ou colonnes d'éléments nuls ou constants ou de formes de degré quelconque; pourvu que les déterminants extraits de la nouvelle matrice soient des fonctions homogènes, celle-ci s'annule pour une figure inscrite ou circonscrite à la figure primitive. Mais, si nous reprenons le tableau de formes quaternaires

$$\left\|\begin{matrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \end{matrix}\right\|$$

en le faisant précéder d'une ligne de formes, on n'obtient un complexe circonscrit à la congruence représentée que si le déterminant ainsi formé a la structure exigée pour la représentation d'un système de droite, c'est-à-dire s'il s'annule pour tout couple de points distincts $\lambda x + \mu y$, $\lambda' x + \mu' y$ chaque fois qu'il s'annule pour x et y. Or cela n'a lieu que dans des cas particuliers, notamment quand la ligne ajoutée est analogue aux lignes existantes, par exemple

$$c_x^2 \quad c_x c_y \quad c_y^2$$ [1]

Mais alors ce déterminant représente un complexe cubique, lieu des droites coupant les quadriques d'un réseau en des couples de points en involution et aussi lieu des générations rectilignes de ces quadriques[2]. Dans le plan, ce déterminant s'annule pour les tangentes à une courbe de troisième classe[3].

---

[1] Avec cette simplification, si c'en est une, que les notations c_x^2, ... peuvent être effectives et non symboliques.

[2] Voir J.-C. Kluyver, *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 1892; D. Montesano, *Mem. d. R. Acc. Bologna,* 1892. Si la base du réseau est une cubique gauche, on a les droites qui s'appuient, au moins en un point, sur cette courbe.

[3] Voir Salmon-Vaucheret, *Sections coniques,* 1884, p. 160. Comme a_x^2, b_x^2, c_x^2 sont, en général, les premières polaires de trois points relatives à une même cubique, on retrouve la steinérienne de cette cubique.

Dans l'espace à trois dimensions, la matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_x a_y & b_x b_y & c_x c_y & d_x d_y \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 & d_y^2 \end{matrix}\right\|$$

s'annule pour la congruence commune à deux complexes cubiques obtenus en supprimant par exemple la troisième ou la quatrième colonne, d'où il faut défalquer la congruence, d'ordre 2 et classe 6, annulant la matrice des deux premières colonnes; reste donc une congruence C_7^3, d'ordre 7 et classe 3, lieu des droites coupant quatre quadriques indépendantes, ou les quadriques d'un système linéaire triplement infini en des couples de points en involution; ou lieu des droites par où passent des faisceaux [1] de quadriques de ce système. Si les quadriques considérées sont les premières polaires d'une surface cubique, on a une congruence C_7^3 de droites liées à cette surface et jouissant encore de cette propriété que les plans polaires des points de chacune de ces droites forment faisceau; les 27 droites de la surface cubique font partie de cette congruence.

Dans l'espace, une matrice analogue à celle qu'on vient d'écrire, mais à cinq ou six colonnes, représente une surface réglée ou un nombre fini de rayons.

Dans le plan, la matrice, à quatre colonnes, écrite en dernier lieu, représente les trois droites qui, dans un système linéaire de ∞^3 coniques, appartiennent chacune à une infinité de courbes dégénérées, ou qui coupent les courbes de ce système en des points en involution [2].

---

[1] La base de chaque faisceau se complète par une cubique gauche.

[2] On rencontre ces trois droites dans le problème suivant. Sur une cubique plane générale, les coniques par 4 points fixes de la courbe découpent une série de couples de points dont les cordes concourent sur la cubique et forment un faisceau projectif à celui des coniques; les coniques passant par ces couples de points et par 4 autres points fixes de la cubique, forment un faisceau projectif au premier; mais deux faisceaux projectifs de coniques engendrent, en général, une courbe du 4^{me} ordre. La question se pose : quand deux faisceaux projectifs de coniques donnent-ils une cubique et une droite? Il faut que, sur une certaine droite, les deux faisceaux découpent la même involution et, comme chaque faisceau est défini par 2 coniques, on est ramené à chercher les droites qui coupent 4 coniques en des couples de points en involution.

8. — Prenons maintenant, dans l'espace à trois dimensions, la matrice à n lignes et $n+1$ colonnes,

$$\left\| a_x^n \quad a_x^{n-1} a_y \quad a_x^{n-2} a_y^2 \quad \ldots \quad a_y^n \right\| ;$$

elle s'annule pour une congruence de droites. L'ordre s'obtient en regardant y comme point fixe; alors la matrice représente, en coordonnées x, une courbe gauche dont le degré se détermine par des procédés connus [1] et qui se décompose en lignes droites; le nombre de celles-ci est $\Sigma p_i p_k$, où p_i, p_k reçoivent des valeurs, différentes entre elles, de 1 à n, donc

$$\sum p_i p_k = n \sum_1^{n-1} p + (n-1) \sum_1^{n-1} p + \ldots + 2$$

$$= \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{(n-1)^2(n-2)}{2} + \ldots + \frac{2^2 . 1}{2} = \frac{1}{2}[n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 1^3]$$

$$- \frac{1}{2}[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2] = \frac{1}{8} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{24}(n-1) n (n+1)(3n+2) .$$

On trouve, comme dans l'exemple de $n = 2$ traité plus haut, le total de l'ordre et de la classe en faisant parcourir à x et y deux droites, d'abord sans point commun; x et y sont alors exprimés linéairement en μ et ν, les éléments de la matrice sont tous d'ordre n en μ et ν, et représentent, dans un plan (μ, ν) un nombre de points égal à $n^2 . \frac{1}{2} n(n+1)$; mais chaque point à l'infini [2] des axes μ, ν est compté indûment un certain nombre de fois; comme les colonnes de la matrice contiennent μ aux degrés n, $n-1$, ..., 1, 0, le calcul nécessaire pour trouver la multiplicité du point à l'infini de l'un des axes est le même que celui qui a fait découvrir

[1] M. Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, Van Gœthem, 1908, p. 10.

[2] Dans ses articles et ses communications manuscrites, L. Godeaux évite les points à l'infini en rendant homogènes les paramètres μ, ν; ainsi on voit peut-être mieux les systèmes de valeurs à défalquer.

l'ordre de la congruence; de même pour l'axe des μ, donc

$$\text{l'ordre} + \text{la classe} = n^2 . \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \text{l'ordre} ,$$

d'où la classe est égale à

$$\frac{1}{2}n^3(n+1) - \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(3n+2) = \frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2) .$$

Si la matrice a $n+1$ lignes et colonnes, elle représente un complexe d'ordre et de classe

$$\frac{1}{2}n(n+1) .$$

Si la matrice a $n+2$ lignes et $n+1$ colonnes, elle représente une congruence, intersection de deux complexes pareils, d'où il faut défalquer une congruence annulant une matrice à n lignes, de sorte que la nouvelle congruence est d'ordre

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2) = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

et de classe

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2) = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2) .$$

Si la matrice a $n+1$ colonnes et $n-1$ ou $n+3$ lignes, elle représente une surface réglée; l'ordre de cette surface s'obtient par un calcul assez pénible, que nous réserverons pour un travail ultérieur. Si elle a $n-2$ ou $n+4$ lignes, elle représente un nombre fini de rayons.

Dans le plan, la matrice à $n+1$ colonnes et n lignes représente un nombre de droites égal à

$$\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2) ,$$

la matrice à $n+1$ colonnes et $n+2$ lignes en représente

$$\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2) .$$

9. — Appliquons encore ceci à l'exemple $n = 3$.

Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un faisceau forment une surface réglée, lieu des trisécantes de la courbe ou du système de courbes formant la base du faisceau [1].

Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un réseau forment une congruence d'ordre 11 et de classe 21. Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un système linéaire triplement infini forment un complexe du sixième ordre [2].

Si un système doublement ou triplement infini de surfaces cubiques passe par une même courbe gauche, les bisécantes ou les unisécantes de cette courbe font respectivement partie de la congruence ou du complexe dont il vient d'être question, mais ces derniers peuvent contenir d'autres droites. Par exemple, l'intersection de deux surfaces cubiques peut se décomposer en une conique et une courbe du septième ordre c_7 [3]; cette dernière appartient à ∞^2 surfaces cubiques se coupant deux à deux suivant des coniques dont les plans passent par un point fixe P de c_7; la congruence des droites de ces surfaces cubiques est d'ordre 11 et de classe 21 et se compose de la congruence (d'ordre 10 et de classe 21) des bisécantes de c_7 et de la congruence (d'ordre 1 et classe 0) des droites issues de P.

Les droites situées chacune sur ∞^1 surfaces cubiques d'un système quadruplement infini, ou, ce qui revient au même, les droites coupant les surfaces de ce système en des ternes de points d'une involution I_3^2 engendrent une congruence d'ordre 25 et de classe 15.

Dans le plan, il y a 21 droites faisant partie de cubiques

---

[1] J.-C. KLUYVER (*Kenmerkende getallen der algebraische ruimtekromme, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences d'Amsterdam,* 1889) et J. DE VRIES (*ibid.*, 1904, p. 264; 1905, p. 29) ont établi que cette surface est d'ordre 42.

[2] Si le système de surfaces cubiques considéré est celui des premières polaires d'une surface du 4^me^ degré, on a un complexe sextique lié à cette surface biquadratique; chaque rayon de ce complexe est décrit par un point dont le plan polaire enveloppe un cône de troisième classe.

[3] Courbe indiquée par G.-H. HALPHEN dans sa classification des courbes gauches algébriques (*Journ. de l'Ecole polytechn.*, 1882, p, 164). étudiée par D. MONTESANO (*Atti Accad. Torino,* 1892); voir aussi M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique,* Gand, Van Gœthem, 1908, p. 44.

dégénérées d'un réseau. Les droites faisant partie de cubiques dégénérées d'un système linéaire triplement infini enveloppent une courbe de sixième classe; c'est aussi l'enveloppe des droites qui coupent les courbes du système en des ternes de points d'une involution I_3^2; dans le cas où le système est celui des premières polaires d'une biquadratique, c'est l'enveloppe des droites telles que les droites polaires de tous leurs points forment faisceau. Enfin, il y a 15 droites qui coupent les cubiques d'un système linéaire quadruplement infini en des ternes d'une involution I_3^2 ou qui appartiennent chacune à ∞^1 cubiques dégénérées.

10. — Si l'on opère en coordonnées-plans u_i et si $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ est l'équation d'un point, les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coefficients de cette équation; de même y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coefficients de l'équation d'un autre point. Toute matrice ou tout déterminant ayant la structure étudiée dans les pages précédentes représente les droites satisfaisant aux équations

$$u_x = 0 \,, \qquad u_y = 0 \,,$$

les coefficients de ces équations étant liés par les relations exprimées par l'évanouissement de la matrice (ou du déterminant).

Corrélativement, toute matrice à deux séries de variables quaternaires u_i et v_i et telle que, s'évanouissant pour deux séries u et v, elle s'annule aussi pour $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$, représente un système de droites, intersections des couples de plans

$$u_x = 0 \,, \qquad v_x = 0 \,,$$

qui obéissent à la loi exprimée par l'évanouissement de la matrice, et l'on est ramené à l'observation qui termine le n° 1.

En soi la remarque actuelle n'a pas grande importance, puisque c'est une simple application du principe de dualité; mais elle se prête à des extensions intéressantes. Car, si $u_1, u_2, \dots u_k$ et $v_1, v_2, \dots v_k$ sont les coefficients homogènes des équations de deux surfaces algébriques, des relations entre u_i et v_i telles que, vérifiées pour u et v, elles le soient pour $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$, représentent des ensembles de courbes gauches, bases de faisceaux de surfaces.

Par exemple, si x, y, z sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les relations

$$u_1(x^2 + y^2 + z^2) + u_2 x + u_3 y + u_4 z + u_5 = 0 \ ,$$

$$v_1(x^2 + y^2 + z^2) + v_2 x + v_3 y + v_4 z + v_5 = 0 \ ,$$

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_u^2 & \alpha_u \alpha_v & \alpha_v^2 \\ \beta_u^2 & \beta_u \beta_v & \beta_v^2 \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent un ensemble quadruplement infini de cercles, puisque le cercle dans l'espace dépend de six constantes et que la matrice ci-dessus lui impose deux conditions.

11. — Si les coefficients des équations $u_x = 0$, $v_x = 0$ de deux plans sont liés par une seule équation algébrique entière,

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$$

telle que, vérifiée par u et v, elle le soit par $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$ $(\lambda\mu' - \lambda'\mu \gtreqless 0)$, on a la représentation d'un complexe, comme nous l'avons fait observer plus haut.

La forme f est fonction des coefficients des quatre formes linéaires binaires

$$u_i X + v_i Y \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et s'annule, par hypothèse, en même temps que la même fonction des coefficients de ces quatre formes transformées par la substitution linéaire

$$X = \lambda X_1 + \lambda' Y_1 \ , \qquad Y = \mu X_1 + \mu' Y_1 \ .$$

Or on sait qu'une telle fonction est un invariant, et tout invariant d'un système de formes binaires linéaires est une somme de produits de déterminants formés par les coefficients de ces formes prises deux à deux; donc f est une fonction des coordonnées $u_i v_k - u_k v_i$ de la droite uv.

Ainsi quand il n'y a qu'une seule fonction f, donnée peut-être sous forme de déterminant, on peut toujours l'exprimer en fonction des coordonnées de la droite; on sait comment A. Clebsch a réalisé cette transformation, et l'on a une traduction analytique du fait, géométriquement évident, qu'un complexe a son ordre égal à sa classe. Au contraire, une matrice rectangulaire (non carrée) n'est pas une quantité; il ne peut être question de la voir se transformer en elle-même multipliée par une puissance du déterminant de la substitution linéaire. L'intérêt de la matrice examinée dans les pages précédentes est précisément que les déterminants extraits de cette matrice ne possèdent pas la propriété d'invariance. Ils peuvent la posséder dans des cas particuliers, notamment quand tous les éléments de la matrice sont exprimés en coordonnées pluckériennes.

Par exemple, si une matrice à l lignes de formes en coordonnées p_{ik} compte l, $l+1$, $l+2$ ou $l+3$ colonnes, elle représente, en général, respectivement un complexe, une congruence, une surface réglée, un nombre fini de rayons. Si les éléments d'une ligne ou de deux colonnes sont linéaires en p_{ik}, tandis que les autres éléments sont des constantes, la matrice à l lignes et $l+1$ colonnes représente une congruence linéo-linéaire. Comme autre exemple, citons la matrice à six éléments linéaires en p_{ik} utilisée par E. Kummer pour la congruence de troisième ordre et classe et de genre deux; nous avons consacré, à cette congruence, une étude toute récente[1]. Mais toutes ces variétés ne sont que de simples cas particuliers en comparaison des matrices à deux séries de variables signalées dans le présent travail. Ces dernières ont, comme mode de représentation, une portée bien supérieure, de la même façon que les variétés annulant des matrices admettent à leur tour, comme cas très particuliers, les intersections complètes de variétés vérifiant des équations algébriques.

12. — Il ne reste qu'un pas à faire pour obtenir de nouvelles matrices analogues à celles qui ont fait le sujet des

[1] M. STUYVÆRT, *Sur la congruence de droites de troisième ordre et classe de genre deux.* (*Rend. d. Circolo mat., Palermo,* t. XXX, pp. 239-264).

pages précédentes. Nous venons de voir en effet que la notion d'invariant, si on la définit par la propriété de se conserver dans la substitution linéaire, ne s'étend pas aux matrices. Mais les invariants ont encore d'autres caractères; par exemple un invariant égalé à zéro exprime une propriété que ne trouble pas la substitution linéaire, c'est-à-dire le déplacement des repères; et ceci peut se généraliser.

Imaginons donc qu'une droite d'un espace quelconque, déterminée par deux de ses points x et y, jouisse de certaines propriétés indépendantes du choix de ces points. Si cette circonstance s'exprime par un système d'équations dont chacune, prise isolément, équivaut à une propriété pareille, toutes ces relations se traduisent directement en coordonnées de droites, comme nous l'avons rappelé plus haut, et ne donnent rien de neuf. Au contraire, les propriétés s'exprimant par l'évanouissement de matrices rectangulaires, alors que les déterminants extraits de ces matrices ne s'annulent pas pour des propriétés pareilles, peuvent conduire à des résultats inédits.

Précisons ceci sur un exemple. Considérons la forme binaire a_x^5 et le second groupe polaire d'un point variable (X_1, X_2) relatif à cette forme,

$$X_1^2 a_1^2 a_x^3 + 2X_1X_2 a_1 a_2 a_x^3 + X_2^2 a_2^2 a_x^3 = 0 . \tag{1}$$

Pour que tous ces ternes de points x forment une involution I_3^1, de troisième ordre et de rang un, il faut que l'équation d'un terne arbitraire soit une combinaison linéaire des équations de deux ternes fixes, donc qu'il existe une relation linéaire identique entre les formes $a_1^2 a_x^3$, $a_1 a_2 a_x^3$, $a_2^2 a_x^3$; et cette condition suffit, puisque l'on peut alors remplacer l'une de ces trois formes par une combinaison linéaire des deux autres. Ainsi donc, quand on a

$$\left\| \begin{matrix} a_1^5 & a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 \\ a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 \\ a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 & a_2^5 \end{matrix} \right\| = 0 , \tag{2}$$

les seconds systèmes polaires de tous les points du support par rapport au groupe de cinq points a_x^5 sont les ternes d'une involution I_3^1, *et cette propriété est indépendante des repères*[1].

Supposons à présent que a_x^5 soit une forme quaternaire, que $a_x^5 = 0$ représente donc la surface générale du cinquième ordre. La droite xy la rencontre en cinq points correspondant aux racines de l'équation en k,

$$a_x^5 + 5ka_y a_x^4 + 10k^2 a_y^2 a_x^3 + 10k^3 a_y^3 a_x^2 + 5k^4 a_y^4 a_x + k^5 a_y^5 = 0 .$$

Les conditions pour que ce groupe de cinq points jouisse de la propriété signalée ci-dessus sont indépendantes des points x et y choisis sur la droite, et les relations qui expriment ces conditions

$$\left\| \begin{matrix} a_x^5 & a_x^4 a_y & a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 \\ a_x^4 a_y & a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 & a_x a_y^4 \\ a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 & a_x a_y^4 & a_y^5 \end{matrix} \right\| = 0 , \tag{3}$$

représentent une congruence de droites.

13. — Il convient de généraliser l'exemple précédent. La matrice (2), suivant qu'on l'envisage dans le sens des lignes ou des colonnes, exprime, quand elle s'annule, que, pour la forme binaire a_x^5, les ternes polaires des points du support forment un système linéaire simplement infini ; ou que les équations des couples polaires des mêmes points, au lieu de pouvoir s'écrire au moyen de trois d'entre elles, sont des combinaisons linéaires de deux d'entre elles seulement, donc que ces couples forment un système linéaire simplement infini ou une involution I_2^1 [2].

Si la matrice (2) a tous ses premiers mineurs nuls, on

---

[1] S'il fallait éviter quelque ambiguïté dans le développement d'un calcul, on remplacerait, dans deux lignes de la matrice (2), les symboles a par les symboles équivalents b, c.

[2] Dans ce cas, 3 points d'un même terne ont toujours même couple polaire et vice-versa. On sait aussi que a_x^5 peut être ramené, en général, à une somme de 3 puissances cinquièmes, donc, par substitution linéaire, à la forme $\alpha x_1^5 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5 + \beta x_2^5$ où λ_1, λ_2, α, β sont

constate que l'on a aussi

$$\left\| \begin{matrix} a_1^5 & a_1^4a_2 & a_1^3a_2^2 & a_1^2a_2^3 & a_1a_2^4 \\ a_1^4a_2 & a_1^3a_2^2 & a_1^2a_2^3 & a_1a_2^4 & a_2^5 \end{matrix} \right\| = 0 ;$$

ceci exprime que les quaternes polaires de tous les points du support coïncident entre eux, de même que tous les points polaires, ou encore que a_x^5 représente cinq points confondus.

Si l'on part de la forme binaire a_x^4, on doit considérer la condition pour que les couples polaires forment une involution, condition équivalente à l'égalité connue

$$\begin{vmatrix} a_1^4 & a_1^3a_2 & a_1^2a_2^2 \\ a_1^3a_2 & a_1^2a_2^2 & a_1a_2^3 \\ a_1^2a_2^2 & a_1a_2^3 & a_2^4 \end{vmatrix} = 0$$

laquelle exprime aussi [1] que les quatre points a_x^4 sont harmoniques; ou les conditions

$$\left\| \begin{matrix} a_1^4 & a_1^3a_2 & a_1^2a_2^2 & a_1a_2^3 \\ a_1^3a_2 & a_1^2a_2^2 & a_1a_2^3 & a_2^4 \end{matrix} \right\| = 0$$

qui se réalisent quand les quatre points a_x^4 sont confondus.

Lorsque l'on part de la forme a_x^3 ou a_x^2 on rencontre une seule matrice ou un déterminant qui s'annule quand les points a_x^3 ou a_x^2 sont confondus.

---

différents de 0. Mais alors la matrice (2) devient, en soustrayant la 2e colonne, multipliée par des constantes convenables, des 3 autres colonnes,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \lambda_1^4\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^3\lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2\lambda_2^3 & 0 & \beta \end{matrix} \right\| ;$$

or un déterminant extrait de cette matrice se réduit à $\alpha\beta\lambda_1^3\lambda_2^2$ et ne peut s'annuler tant que la forme a_x^5 comprend 3 puissances cinquièmes distinctes. Par contre, si elle se ramène à 2 puissances cinquièmes, ou à $\alpha x_1^5 + \beta x_2^5$, tous les éléments de la 2e ligne sont nuls dans la matrice (2). Donc l'évanouissement de cette matrice exprime que $a_x^5 = 0$ se ramène à une équation binôme.

[1] Voir Salmon-Bazin, *Algèbre supérieure*, p. 173.

Plus généralement, si a_x^{2p+1} est une forme d'ordre impair, la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1^{2p+1} & a_1^{2p} a_2 & \dots & a_1^p a_2^{p+1} \\ a_1^{2p} a_2 & a_1^{2p-1} a_2^2 & \dots & a_1^{p-1} a_2^{p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{p+1} a_2^p & a_1^p a_2^{p+1} & \dots & a_2^{2p+1} \end{matrix} \right\|$$

s'annule quand les groupes polaires d'ordre p forment un système linéaire $p-1$ fois infini, donc une involution I_{p+1}^{p-1}; en même temps les groupes polaires d'ordre $p+1$ forment une involution I_p^{p-1}. De même, en prolongeant vers la droite par une nouvelle colonne formée suivant la même loi et en supprimant la dernière ligne, on a une matrice qui s'annule quand les groupes polaires d'ordre $p-1$ ou $p+2$ forment des systèmes $p-2$ fois infinis, donc des involutions I_{p+2}^{p-2} ou I_{p-1}^{p-2}. On continue, de proche en proche, jusqu'à la matrice à 2 lignes et $2p+1$ colonnes qui s'annule quand les $2p+1$ points a_x^{2p+1} sont confondus.

On a des énoncés analogues pour la forme d'ordre pair qui donne un déterminant ou une matrice dans laquelle la différence entre le nombre de lignes et de colonnes est pair.

Les propriétés exprimées par l'évanouissement de toutes ces matrices sont *invariantes*[1].

14. — Nous allons chercher l'ordre et la classe de la congruence de droites à laquelle donne naissance la matrice à $p+1$ lignes et $p+2$ colonnes de formes *quaternaires* en x et y,

$$\left\| \begin{matrix} a_x^{2p+1} & a_x^{2p} a_y & \dots & a_x^p a_y^{p+1} \\ a_x^{2p} a_y & a_x^{2p-1} a_y^2 & \dots & a_x^{p-1} a_y^{p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_x^{p+1} a_y^p & a_x^p a_y^{p+1} & \dots & a_y^{2p+1} \end{matrix} \right\|.$$

[1] On peut imaginer d'autres propriétés invariantes annulant des matrices, notamment si l'on part de formes algébriques simultanées. Nous y reviendrons dans un travail ultérieur.

L'ordre μ s'obtient en supposant les x constants et les y variables, et en appliquant la formule générale[1] relative à une matrice dont l'élément situé dans la i^{me} ligne et la k^{me} colonne est de degré $n_i + q_k$,

$$\mu = \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n^2 + \Sigma n \Sigma q + \Sigma q_1 \Sigma q_2 \ .$$

Ici les quantités n sont égales à 0, 1, 2, ... p, et les quantités q à 0, 1, 2, ... $p + 1$, donc on a successivement

$$\Sigma q_1 q_2 = \Sigma n_1 n_2 + (p+1)(1 + 2 + \dots + p) = \Sigma n_1 n_2 + \frac{1}{2}p(p+1)^2 \ ,$$

$$\mu = 2\Sigma n_1 n_2 + \frac{1}{2}p(p+1)^2 + \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) + \frac{1}{4}p(p+1)^2(p+2) \ ;$$

mais on a vu plus haut (n° 8)

$$\Sigma n_1 n_2 = \frac{1}{24}(p-1)p(p+1)(3p+2) \ ;$$

d'où, après quelques calculs,

$$\mu = \frac{1}{2}p(p+1)^2(p+2) \ .$$

Pour avoir la somme $\mu + \nu$ de l'ordre et de la classe, on fait parcourir aux points x et y deux ponctuelles en ligne droite, définies chacune par un paramètre λ ou λ', d'après la méthode du n° 8. Tous les éléments de la matrice à $p + 1$ lignes et $p + 2$ colonnes sont d'ordre $2p + 1$ en λ et λ', et la matrice s'annule pour

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2$$

systèmes de valeurs, mais il faut défalquer les points à l'infini des axes des λ et des λ', et la multiplicité de chacun de ces points à l'infini donne lieu à un calcul identique à celui qui a fourni l'ordre μ, donc

$$\mu + \nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2 - 2\mu \ ,$$

$$\nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2 - 3\mu \ ,$$

[1] Voir M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, Van Gœthem, 1908, p. 10.

d'où, en introduisant la valeur de μ, après quelques calculs,

$$\nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(p^2+p+1) \ .$$

Pour $p=1$, c'est-à-dire pour la surface du troisième ordre, on trouve $\mu=6$, $\nu=9$; ces nombres sont l'ordre et la classe de la congruence des droites qui touchent la surface en trois points confondus, ou des tangentes inflexionnelles des sections planes.

Pour $p=2$, c'est-à-dire pour la surface du cinquième ordre, on a $\mu=36$, $\nu=42$. Dans ce cas on a encore une autre matrice à deux lignes et cinq colonnes qui s'annulent pour un nombre fini de rayons.

Pour les surfaces d'ordre $2p$, on a un complexe d'ordre $2p+(2p-2)+\ldots+2=p(p+1)$ annulant un déterminant et, dans le cas particulier de $p=2$, le complexe sextique connu des rayons qui rencontrent la surface en quatre points harmoniques. Il faut ensuite, mais ceci est réservé pour un travail ultérieur, étudier la surface réglée annulant une matrice qui compte deux colonnes de plus que de lignes.

15. — On ne doit pas s'exagérer la portée des observations qui précèdent. Une matrice invariante, à deux séries de variables x et y, s'annule pour un système de droites alors que les déterminants extraits de cette matrice ne représentent pas des complexes: il faut en conclure seulement qu'il est plus aisé d'étudier ce système de droites avec deux séries de variables, mais non pas qu'il est impossible de passer à une représentation en coordonnées pluckériennes. En d'autres termes, ces congruences, ces surfaces réglées n'échappent pas à la méthode générale consistant à regarder les quantités p_{ik} ou $x_i y_k - x_k y_i$ comme des coordonnées homogènes d'un point d'une hyperquadrique dans l'espace à cinq dimensions, et à étudier les variétés algébriques situées sur cette hyperquadrique. Car l'évanouissement d'une matrice en x et y signifie que les éléments de ses n colonnes vérifient une même relation linéaire dont les coefficients sont par exemple μ_1, μ_2, ... ; à ces n équations on peut joindre les cinq suivantes,

$$p_{12} : (x_1 y_2 - x_2 y_1) = p_{13} : (x_1 y_3 - x_3 y_1) = \dots$$

et regarder les μ, les x et les y comme des paramètres ; on a un système de relations qui représente une ou plusieurs variétés algébriques et, d'après les recherches de L. Kronecker, chacune de celles-ci peut être représentée par des équations, en nombre égal ou inférieur à six, ne contenant que les six variables homogènes p_{ik}.

M. STUYVAERT (Gand).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur une question élémentaire de maximum.

1. — Pour déterminer élémentairement le maximum de certaines fonctions, on fait usage du théorème :

A. *Le produit de* n *nombres positifs, dont la somme est constante, est maximum* LORSQUE *les nombres sont égaux entre eux.*

Avec la démonstration ordinaire on entend prouver que : *si le produit est maximum, les nombres ne peuvent pas être non égaux.* Le mot LORSQUE du théorème A exprime donc que : *si le produit est maximum, les facteurs sont égaux.* Mais alors le théorème A est faux. Que l'on considère, par exemple, les produits

$$(6 - \sin x)(2 + \sin x)\ , \qquad (3 - x^2 + 6x)(22 + x^2 - 6x)\ ,$$
$$(1 + x)(2 + x)(3 - 2x)$$

à facteurs positifs (dans les intervalles 0 à π, $3 - 2\sqrt{3}$ à $3 + 2\sqrt{3}$, -1 à $1{,}5$) et de somme constante, qui passent par un maximum pour

$$x = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x = 3\ , \qquad x = \frac{\sqrt{39} - 3}{6}$$

sans que les facteurs soient égaux.

Le théorème A doit être énoncé exactement sous la forme suivante : *Si* n *nombres positifs variables ont somme* (s) *constante, et si en un point de leur champ de variation ils prennent une même valeur* (s : n), *alors en ce point leur produit est maximum,* comme