§I.

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

L'idée de *mesure* est à la base de toutes les applications des Mathématiques. C'est à elle que l'on doit l'introduction du nombre dans le domaine physique et, par conséquent, la soumission, bien qu'encore incomplète, de ce domaine aux Mathématiques. Elle est, ainsi que l'a fait observer un biologiste doublé d'un clairvoyant psychologue, l'élément primordial et indispensable de toute science[1]. Il est donc permis de regretter la parcimonie avec laquelle quelques considérations, d'ailleurs généralement dépourvues de précision, lui sont consacrées dans les cours d'Arithmétique et de voir là une lacune à combler.

En outre, la Géométrie métrique (la seule encore dont les principes soient nettement établis) est, en définitive, l'étude d'un système de mesure, de sorte que c'est aussi dans une théorie générale de la mesure que la Géométrie (en sa substance purement rationnelle) doit trouver son véritable fondement.

On se propose, dans ce premier article, de rechercher quels pourraient être les éléments essentiels d'une théorie purement rationnelle de la mesure pour les continus à une dimension.

§ I.

On entend, en général, par *grandeur*, ce qui est susceptible de mesure, c'est-à-dire susceptible de représentation numérique, et l'on distingue deux sortes de grandeurs, celles que l'on représente au moyen des nombres naturels et celles que l'on représente au moyen du continu numérique.

[1] F. Le Dantec, *Science et conscience ;* Paris, 1908.

Pour les premières, le mécanisme de la représentation est si simple et si naturel qu'il paraît inutile de s'y arrêter.

La question est loin d'être aussi facile pour les grandeurs de la deuxième catégorie. Le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels, nous faisons ici une confusion sans conséquence), bien que *dense*, est composé d'éléments *distincts*, tandis que l'*individualité* disparaît du domaine physique justement lorsque l'on s'efforce d'y introduire la précision. Les grandeurs physiques, pour pouvoir être représentées numériquement, doivent donc subir une transformation, toute conventionnelle d'ailleurs, qui en fait les êtres purement rationnels que sont les *ensembles applicables sur le continu numérique*. Ce sont ces ensembles auxquels l'on doit donner le nom de *continus*. La notion de ces ensembles ordonnés, étant ainsi purement rationnelle, peut évidemment être établie, en dehors de toute intuition expérimentale, par des procédés purement logiques et, par suite, la notion de mesure acquiert elle-même un caractère franchement rationnel et prend place dans le domaine proprement mathématique.

Puisqu'un continu, par définition, peut toujours être supposé appliqué sur le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels), il doit suffire de développer sur celui-ci la notion de mesure. On peut pourtant donner à cette notion une définition susceptible de s'appliquer à d'autres ensembles ordonnés que les continus.

Supposons que l'on ait pu définir, pour les segments[1] d'un ensemble ordonné M, une « relation d'égalité[2] » satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Etant donné un segment $(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$, *il existe toujours, à droite d'un élément quelconque,* m'_1 *de l'ensemble, un et un seul*

[1] J'appelle *segment* d'un ensemble ordonné l'ensemble formé par les éléments compris entre deux éléments déterminés et par ces deux éléments.

[2] Définir, pour les éléments d'un ensemble, une « relation d'égalité », c'est répartir ces éléments en ensembles s'excluant deux à deux, de sorte que chaque élément m n'est contenu que dans un seul de ces ensembles partiels, que l'on peut, par conséquent, désigner par $\mathrm{F}(m)$; la relation d'égalité entre deux élements pourra alors s'exprimer sous la forme :

$$\mathrm{F}(m) = \mathrm{F}(m')$$

où le signe $=$ exprime l'identité de deux ensembles et possède, par suite, toutes ses propriétés habituelles.

élément m'_2 *tel que les deux segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *soient « égaux ».*

b) Si les deux groupes ordonnés de trois éléments (m_1, m_2, m_3), (m'_1, m'_2, m'_3) *sont tels que les segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *d'une part,* (m_1, m_3) *et* (m'_1, m'_3) *d'autre part, sont égaux, il en doit être de même des segments* (m_2, m_3) *et* (m'_2, m'_3).

On dira alors que l'on a défini pour l'ensemble M (ou mieux pour ses segments) un *système de mesure.*

On peut aussi individualiser ce qu'ont de commun les segments égaux entr'eux et en faire un « abstrait rationnel », auquel on peut donner le nom de *grandeur*. La proposition (b) est alors équivalente à la suivante: « trois éléments m_1, m_2 et m_3 étant donnés, la grandeur du segment (m_1, m_3) est déterminée en fonction des grandeurs a et b des segments (m_1, m_2) et (m_2, m_3) ». On l'appelle *somme* des grandeurs a et b et on la désigne par l'expression $a + b$; sa définition s'exprime alors par la formule

$$(m_1, m_2) + (m_2, m_3) = (m_1, m_3) ,$$

d'où l'on déduit facilement la propriété suivante :

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

On peut généraliser les notions qui viennent d'être établies (y compris celle d'addition) en faisant abstraction de l'idée d'ordre. Il est intéressant de remarquer qu'une relation d'égalité satisfaisant à ce qui subsiste alors des conditions (a) et (b) ne suffit pas pour ordonner l'ensemble M. On en a un exemple dans la notion de vecteur en Géométrie, qui détermine évidemment une telle relation pour les couples de points de l'espace.

Pour développer en toute généralité une théorie de la mesure pour les ensembles ordonnés à une dimension, il y aurait lieu d'abord de déterminer ceux de ces ensembles qui comportent des relations d'égalité satisfaisant aux conditions (a) et (b). On se bornera dans ce qui va suivre à déterminer les systèmes de mesure ou *métriques* dont est susceptible l'ensemble des nombres réels, pris comme type des continus à une dimension.