III

senter, la carte s'obtient avec exactitude. Des sections défavorables de lignes entre elles ne se présentent pour aucun hémisphère, mais dans le second, Oh, on peut avoir à joindre des points très rapprochés.

Le centre du tracé, fig. 4, est un *point de l'équateur*.

Si l'on désigne par A^* (fig. 4) le point d'intersection de l'image p^* d'un parallèle quelconque de latitude φ, avec l'image h^* du méridien de longitude égale à 90° ; il est facile de voir que la droite OA^* est tangente à p^* en A^*. Autrement dit h^* est coupé orthogonalement par l'image p^* de n'importe quel parallèle. L'équation de p^* en coordonnées polaires (φ, u) est en effet[1]

$$\rho^2 = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 u}}{\sin u}\right) .$$

Comme pour $u = \varphi$ les deux valeurs que prend ρ sont égales entre elles, la droite OA^* est bien tangente à p^*. Dans la figure cette droite tangente à été construite pour $\varphi = 60°$.

A deux *méridiens* symétriques par rapport au méridien de O correspond comme image une courbe unique du quatrième degré,

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2\lambda) + 4\sin^2\lambda = 0$$

admettant N^* et S^* comme points doubles, fig. 4. De cette équation on déduit immédiatement les angles ω que les tangentes en ces points forment avec Ox (ou N^*x'). On a par exemple pour N^*

$$tg\omega = \pm\frac{1}{2}\,\text{cotg}\,\lambda = \pm\frac{1}{2}\,\text{tg}(90° - \lambda) .$$

Si donc BD (fig. 4) est égal à la tangente trigonométrique de l'angle $(90° - \lambda)$, $B\overline{D} = \frac{1}{2}BD$ sera la tangente trigonométrique de la direction ω. (Cercle trigonométrique autour de N^*.)

III

La projection de Lambert d'un cercle quelconque de la sphère est un ovale faisant partie d'une courbe du quatrième

---

[1] Cf. FIORINI : *Le projezioni delle carte geografiche*, Bologna 1881, ou BRANDENBERGER, *loc. cit.*

degré. La courbe entière se compose de celui-ci et d'un autre qui lui est symétrique par rapport à O. Le second correspond d'ailleurs à un autre cercle de la sphère, qui est symétrique au premier par rapport à un certain plan passant par Oz [1].

La *quadrature de ces ovales* conduit à d'intéressantes applications du Calcul intégral. Les résultats sont simples et l'on peut trouver de nombreux exemples où ils seront indépendants des coefficients de l'équation, si l'on suppose, comme on l'a fait plus haut, $R = 1$. On peut les obtenir aussi par voie géométrique, car la projection de Lambert est, comme on sait, une projection équivalente [2].

Voici quelques exemples de quadratures pour lesquels il est avantageux d'introduire les coordonnées polaires. Comme on l'a dit, les courbes comprennent toujours deux ovales de forme identique. Il ne s'agit jamais que de l'évaluation de l'aire de l'un d'eux.

1. Soit la courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2 \lambda) + 4 \sin^2 \lambda = 0 \ ,$$

qui est l'image (fig. 4) d'un méridien de longitude λ. L'aire de l'un des ovales est indépendante de λ et égale à 2π.

2. La courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)y^2 + 4 \sin^2 \varphi = 0$$

correspond (fig. 4) à un parallèle de latitude φ. L'aire de la calotte sphérique située au nord de ce parallèle est égale à $2\pi(1 - \sin \varphi)$. Il en est par conséquent de même pour l'un des ovales de la courbe.

3. L'équation de l'image (fig. 3) d'un parallèle de latitude φ est :

$$\left\{ (x^2 + y^2) \sin \varphi_0 + 2(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right\}^2 + y^2 \cos^2 \varphi_0 (x^2 + y^2 - 4) = 0 \ .$$

La surface d'un de ces ovales est $2\pi(1 - \sin \varphi)$. φ_0 n'intervient pas dans le résultat.

4. Un ovale de la courbe

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 \cos^2 \varphi_0 + (x^2 + y^2 - 4)(x \operatorname{cotg} \lambda + y \sin \varphi_0)^2 = 0$$

---

[1] Cf. BRANDENBERGER, *loc. cit.*

[2] Voir p. ex. : GERMAIN, *Traité des Projections des Cartes géographiques*. Paris.

est d'aire égale à 2π. Cet ovale est l'image d'un méridien (fig. 3) et partage en deux parties égales l'intérieur du cercle Q^*.

5. Soit enfin a et b deux quantités réelles quelconques. L'un des ovales de la courbe

$$a^2b^2(x^2+y^2-2)^2+(a^2+b^2)y^2(x^2+y^2-4)=0$$

peut être envisagé comme image d'un certain grand cercle de la sphère. On verra facilement que l'aire de l'ovale est encore égale à 2π.

C. Brandenberger (Zurich).

SUR QUELQUES EXEMPLES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES NATURELLES[1]

L'observation de la nature fournit de remarquables exemples dans lesquels interviennent les considérations mathématiques les plus diverses.

1. — Ainsi, en examinant le mouvement des glaciers de conformation normale, on aperçoit immédiatement les lignes indiquant la direction du courant et les crevasses glaciaires qui forment au point de vue mathématique un système de trajectoires orthogonales comme on s'en rend compte dans la fig. 1. Les crevasses représentent ici d'une part les lignes d'égale vitesse et de l'autre les lignes de tension maximum.

Dans le mouvement des glaciers, nous sommes donc en présence d'une combinaison de lignes de courant et de lignes de tension. Les lignes de tension s'expliqueront de la façon la plus simple par l'involution projective des lignes de section et de tension dans un milieu tendu[2]. Dans toute involu-

---

[1] Extrait de la Conférence faite par M. Arn. Emch (Soleure), à l'assemblée annuelle de la Soc. suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Soleure le 10 oct. 1909. *Einige mathem. u. mechanische Betrachtungen in der Natur.* — Traduction de J.-P. Dumur, Genève.

[2] Ritter, *Graphische Statik* 1. B., 128-134.