Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES EXEMPLES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES NATURELLES

Autor: Emch, Arn.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12778

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

est d'aire égale à 2π. Cet ovale est l'image d'un méridien (fig. 3) et partage en deux parties égales l'intérieur du cercle Q^*.

5. Soit enfin a et b deux quantités réelles quelconques. L'un des ovales de la courbe

$$a^2b^2(x^2+y^2-2)^2+(a^2+b^2)y^2(x^2+y^2-4)=0$$

peut être envisagé comme image d'un certain grand cercle de la sphère. On verra facilement que l'aire de l'ovale est encore égale à 2π.

C. Brandenberger (Zurich).

SUR QUELQUES EXEMPLES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES NATURELLES[1]

L'observation de la nature fournit de remarquables exemples dans lesquels interviennent les considérations mathématiques les plus diverses.

1. — Ainsi, en examinant le mouvement des glaciers de conformation normale, on aperçoit immédiatement les lignes indiquant la direction du courant et les crevasses glaciaires qui forment au point de vue mathématique un système de trajectoires orthogonales comme on s'en rend compte dans la fig. 1. Les crevasses représentent ici d'une part les lignes d'égale vitesse et de l'autre les lignes de tension maximum.

Dans le mouvement des glaciers, nous sommes donc en présence d'une combinaison de lignes de courant et de lignes de tension. Les lignes de tension s'expliqueront de la façon la plus simple par l'involution projective des lignes de section et de tension dans un milieu tendu[2]. Dans toute involu-

---

[1] Extrait de la Conférence faite par M. Arn. Emch (Soleure), à l'assemblée annuelle de la Soc. suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Soleure le 10 oct. 1909. *Einige mathem. u. mechanische Betrachtungen in der Natur.* — Traduction de J.-P. Dumur, Genève.

[2] Ritter, *Graphische Statik* 1. B., 128-134.

tion existe, comme on le sait, deux directions à angle droit correspondant à la tension maximum et minimum en chaque point du champ, et c'est par cela que s'explique l'orthogonalité des trajectoires. Comme exemple particulièrement intéressant d'un milieu en tension avec involution elliptique, je citerai la formation des crevasses sur un champ de limon en train de sécher, comme il s'en forme après une inondation; ou encore la formation des fentes sur une surface de bois

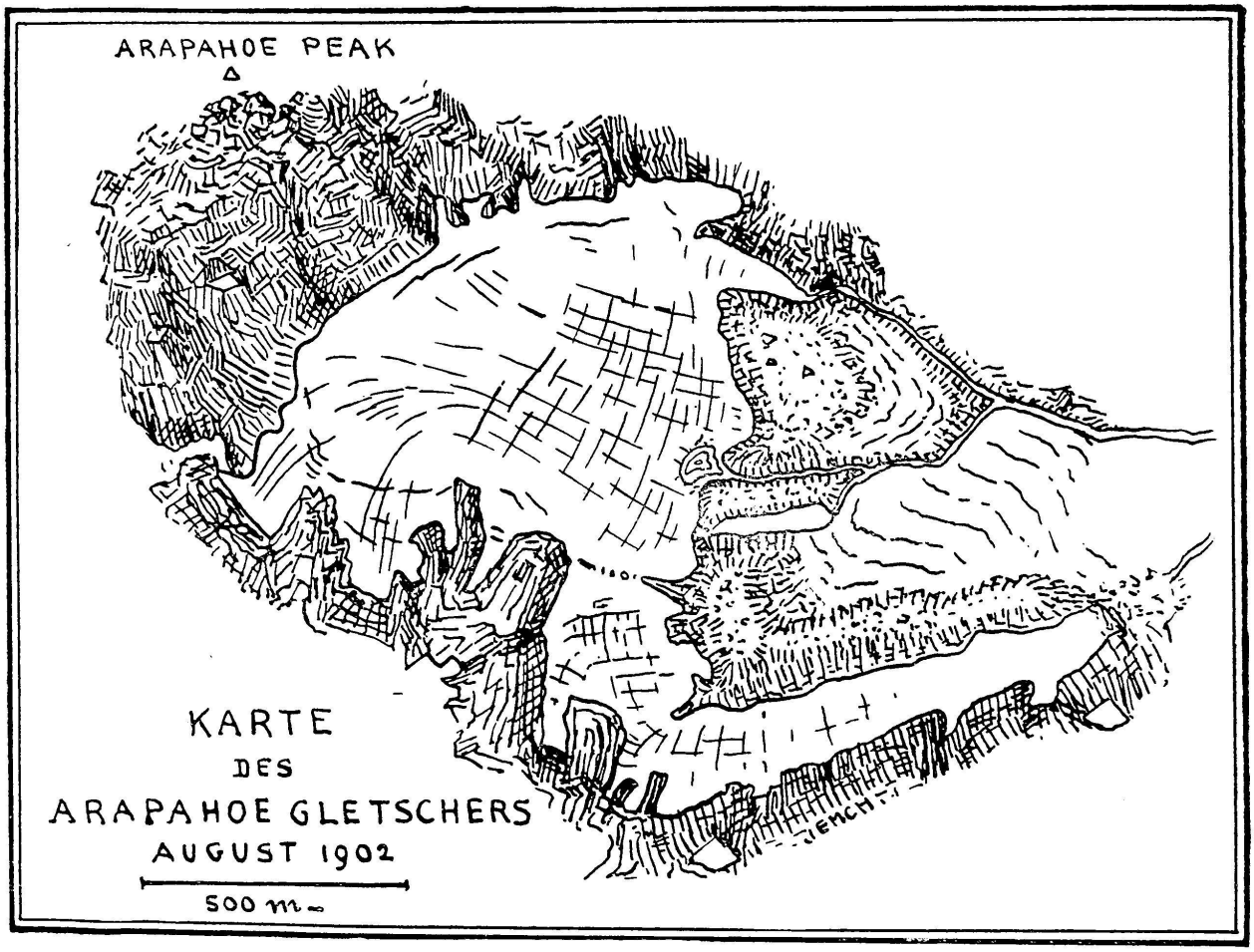

Fig. 1.

recouverte d'une forte couche de vernis ou de peinture[1]. Dans les deux cas les nombreuses fentes et fissures qui se forment en séchant sont toutes, presque sans exceptions, perpendiculaires les unes sur les autres; ce qui s'explique par l'involution des lignes de tension du milieu en question. Dans cette involution, il n'y a que les tensions qui agissent dans les directions perpendiculaires. L'une est la tension

[1] A. Emch, *An Introduction to Projective Geometry and its Applications*, p. 239. New-York, John Wiley & Sons, 1905.

maximum, l'autre la tension minimum. On devrait en conclure, semble-t-il, que les fentes correspondant[1] aux tensions maximum devraient former un système de courbes plus ou moins parallèles, ce qui n'est pourtant pas le cas. On peut expliquer cette anomalie, visible dans la fig. 2, de la façon suivante : par la formation d'une fente, la tension maximum qui agissait perpendiculairement à la direction de cette fente est supprimée, de telle sorte que la tension minimum qui

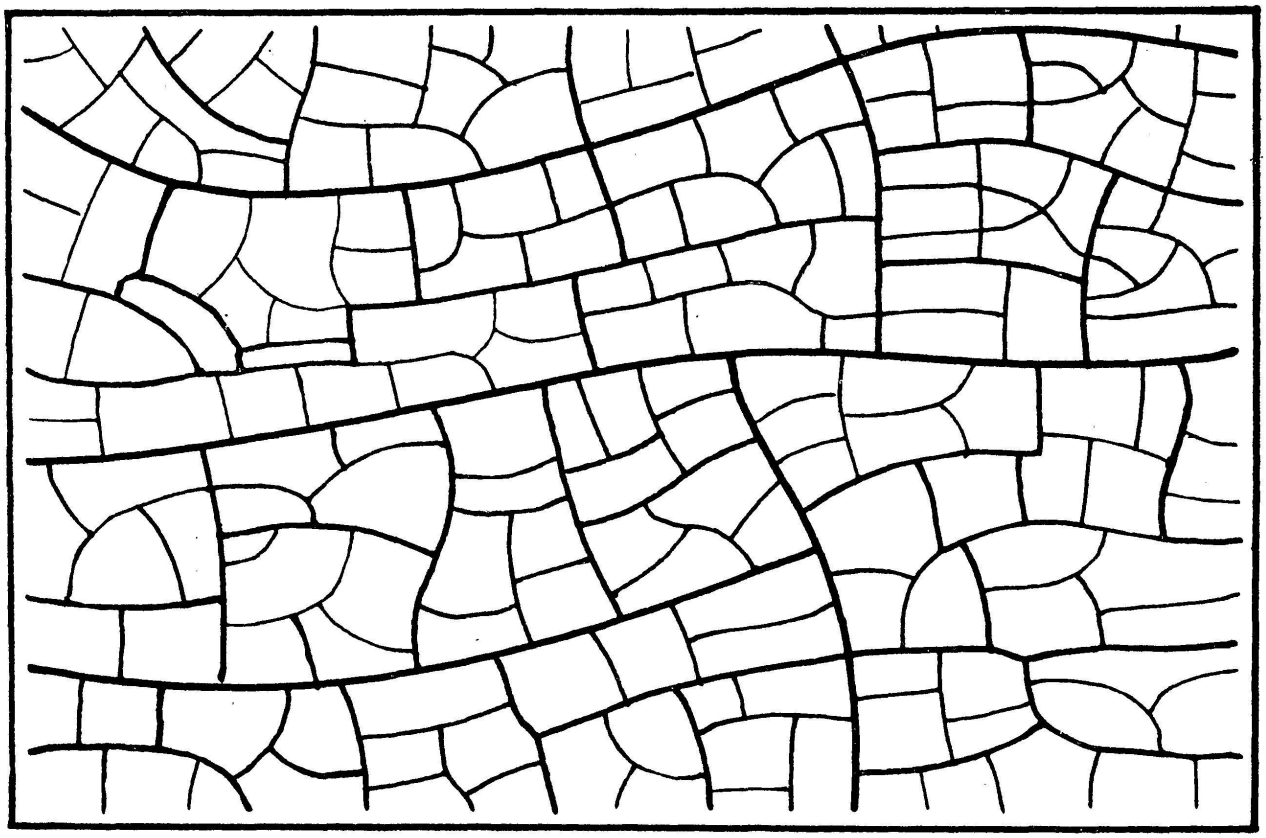

Fig. 2.

agissait auparavant dans la direction de la fente devient alors la tension maximum dans cette partie du champ. C'est pourquoi la fissure suivante se formera perpendiculairement à la première fente.

2. — Malgré la grande difficulté que l'on éprouve à représenter mécaniquement les phénomènes de la vie organique et la presque impossibilité de formuler mathématiquement les problèmes biologiques, il faut reconnaître cependant que, dans bien des cas, un observateur attentif trouvera un carac-

[1] P. Groth, *Physicalische Kristallographie*, Leipzig. W. Engelmann, 1895.
A. Schoenflies, *Kristallsysteme une Kristallstruktur*, Leipzig, Teubner, 1891.

tère mathématique dans tel ou tel phénomène du domaine végétal ou animal.

Que l'on se rappelle la loi de Mendel sur l'hérédité et sa vérification par les expériences intéressantes du Professeur L. Cuénot, à Nancy, sur le croisement des souris blanches et grises [1] et du Prof. A. Lang sur la formation des variétés chez les limaçons de jardins [2].

Par le croisement de la souris grise commune et de la souris blanche albinos, on obtient exclusivement des descendants gris. L'élément gris G domine, tandis que l'élément blanc B est caché par le gris. Si l'on croise maintenant deux de ces descendants, on obtient non seulement des souris grises, mais également des blanches, et le nombre des grises est au nombre des blanches dans le rapport de 3 à 1. Pour déduire cela de la loi générale observée par Mendel, nous supposerons que les éléments primitifs G et B ne se réunissent pas dans le croisement, mais restent séparés, une moitié se compose d'éléments G, l'autre moitié d'éléments B. Comme croisement, ne sont possibles que les combinaisons suivantes, en nombre égal, des éléments G et B :

G et G
G et B
B et G
B et B

Chacune de ces combinaisons fournira un descendant, et dans les combinaisons où se trouve un élément G, le gris dominera. Parmi les descendants, on trouvera donc en moyenne trois gris pour un blanc, ce qui correspond quantativement tout à fait aux expériences faites par différents savants dans ce domaine. Ce résultat peut être représenté par la formule

$$GB \,.\, GB \,. = 1GG + 2GB + 1BB \,.$$

Cette loi qui présente aussi, d'une manière générale, une

[1] *Revue scientifique*, Paris (28 avril 1906).

[2] *Über die Mendelschen Gesetze, Art und Varietätenbildung, Mutation und Variation, insbesondere bei unsern Hain- und Gartenschnecken. Verhandlaungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft* in Luzern, 1905.

grande importance pour la société humaine, est donc basée sur la théorie des combinaisons qui est un domaine franchement mathématique.

3. — En biométrie, on sait qu'il existe une certaine relation entre la grosseur et le nombre des graines d'une plante. Si l'on porte comme abscisses les diamètres des graines et comme ordonnées le nombre des graines correspondant à ces divers diamètres, on obtient des courbes qui se rapprochent plus ou moins de la courbe connue de fréquence d'erreur du calcul des probabilités [1], et qui caractérisent tout à fait les plantes correspondantes.

La disposition des feuilles chez les différentes plantes est également remarquable au point de vue mathématique. Elle a lieu suivant des lois parfaitement déterminées et est constante pour chaque espèce. La distance qui sépare deux feuilles consécutives dans une même espèce est toujours représentée par la même fraction $\frac{n}{m}$ du pourtour. Dans la disposition des feuilles alternantes, les fractions $\frac{n}{m}$ sont les réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ \ldots}}},$$

c'est-à-dire $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$ et représentent les termes d'une série spéciale de Lamé [2]. On les appelle divergentes et elles présentent un rapport rationnel avec le pourtour de la tige, de sorte que, sur la ligne en spirale, l'hélice, qui supporte les feuilles, chaque feuille se trouve, après un cycle déterminé, perpendiculaire à une autre située plus bas. Par cette disposition mathématique si raffinée, pour ainsi dire, la nature obtient la répartition aussi régulière que possible des feuilles autour de l'axe commun. Il n'y a ainsi pas de place perdue et la charge se répartit d'une manière égale sur l'axe;

---

[1] J. Bertrand, *Calcul des probabilités*, p. 175-246 (Paris).
[2] Strassburger, *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen*, p. 31-35.

la position verticale assure également les meilleures conditions d'éclairement.

4. — Chez les plantes grimpantes, on trouvera une application du mouvement en spirale.

Mécaniquement, ce mouvement en spirale s'explique par le fait que la partie de la tige exposée à la lumière se développe mieux et par suite se dilate davantage ; il en résulte une inflexion de la tige autour du support. Cependant, le fait que la plupart des plantes grimpantes, à part quelques exceptions (houblon, chèvrefeuille, polygonum convolvulus) sont lévogyres n'est pas expliqué mécaniquement, on se contente d'indiquer la chose au point de vue physiologique en faisant intervenir le géotropisme. En particulier, j'ai observé personnellement, dans les Montagnes Rocheuses, que les pins et sapins placés dans le voisinage des lisières de forêts présentent une disposition lévogyre de leurs fibres, ce qui s'explique par les torsions et flexions occasionnées par les vents.

5. — En ce qui concerne la forme des feuilles, ce sont principalement, d'après Bodo Habenicht[1] les influences extérieures du temps et des actions mécaniques qui entrent en ligne de cause. C'est à cet auteur que l'on doit la représentation analytique de la plupart des formes de feuilles par des équations de la forme

$$r = f(\cos \varphi)$$

en coordonnées polaires ; et il espère trouver avec le temps, la preuve physiologique de la nécessité de cette forme particulière.

7. — Comme exemple remarquable, je mentionnerai ici la disposition de l'intérieur des fleurs d'une plante pullulante parfaite (Chrysanthemum leucanthemum) et de la camomille ordinaire (Matricaria chamomilla). Chez ces fleurs, les diamètres des petites fleurs intérieures croissent proportionellement à leur éloignement du centre, comme on peut s'en rendre compte par l'accroissement des rayons. Mais pour

[1] *Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter,* Berlin, Otto Salle, 1905.

obtenir, avec cette loi, l'utilisation la plus complète possible de la surface entière par le plus grand nombre possible de fleurs partielles, il faut que ces fleurs circulaires se touchent trois à trois mutuellement ; comme ce serait le cas pour des cercles d'égale grandeur placés sur une surface plane rectangulaire. Pour démontrer cette proposition, nous supposerons tout d'abord que la surface d'une disposition quelconque de cercles dans le rectangle peut être mise sous la forme $p \,.\, x \,.\, y$, dans laquelle p peut prendre toutes les valeurs possibles $0 < p < 1$. Si nous exceptons les singularités, nous pouvons dire que par une transformation quelconque l'expression $p \,.\, x \,.\, y$ devient fonction $p \,.\, \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ de la surface rectangulaire transformée. Si m est la valeur de p qui rend $p \,.\, x \,.\, y$ maximum, $m \,.\, \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ représentera aussi un maximum dans la surface transformée. Supposons que la surface rectangulaire soit placée dans un plan de nombres complexes et faisons la transformation [1]

$$\mathrm{Z} = e^z = e^{x + iy},$$

de telle façon que

$$\mathrm{X} = e^x \,.\, \cos y, \quad \mathrm{Y} = e^x \,.\, \sin y,$$

le système des droites parallèles $x =$ const. se transforme en un système de cercles concentriques

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = e^{2x}$$

et celui des parallèles $y =$ const. en un faisceau

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} \,.\, \mathrm{tg}\, y.$$

La fonction e^z a la période $2i\pi$, de telle sorte que la bande du plan z comprise entre $y = \pi$ et $y = -\pi$ est représentée une fois et d'une façon complète sur le plan Z. Si l'on divise cette bande en bandes partielles distantes de $\frac{\pi}{8}$, et si l'on considère les lignes de division comme lieux de cercles

[1] Voir FRICKE : *Kurze gefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höhern Mathematik. Analytisch-funktionen theoretischer* Teil. Leipzig, Teubner, 1900.

tangents de même grandeur, le rayon de ces cercles vaudra, d'après la fig. 3,

$$AD = CD \,.\, \text{tg } 30 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} \,.$$

Si l'on représente par a le demi-angle formé, après trans-

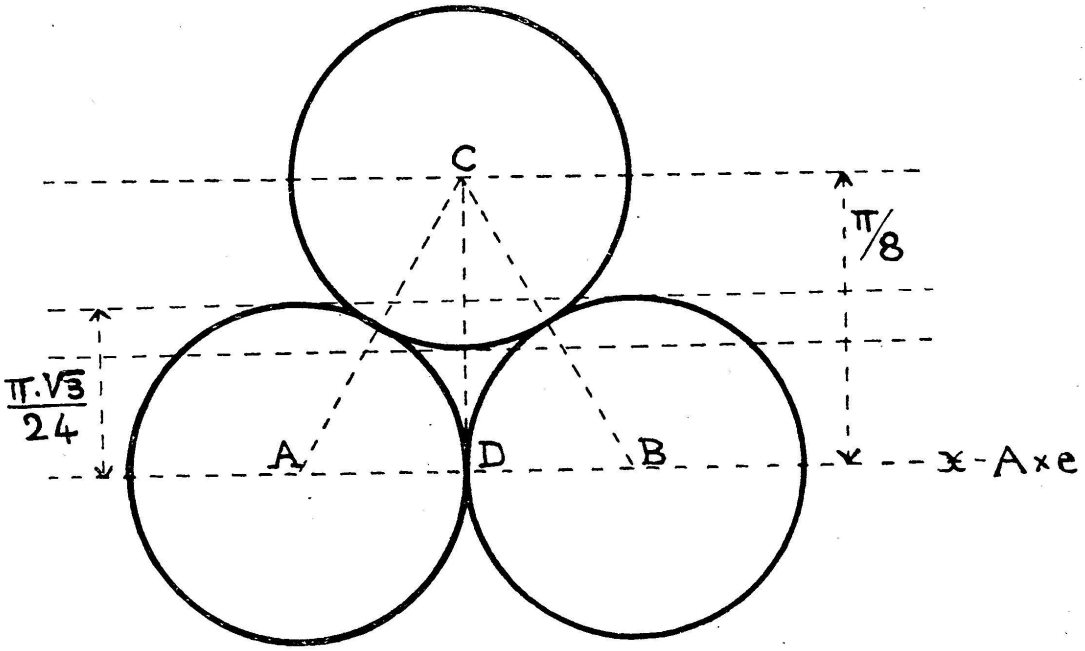

Fig. 3.

formation, par les tangentes communes d'une série circulaire de cercles tangents, on aura

$$\text{tg } a = \frac{\pi \,.\, \sqrt{3}}{24}$$

et $a = 12°46'28''$. A l'aide de cet angle, il était facile de construire la fig. 4, qui représente exactement la disposition de la fleur intérieure d'un chrysanthemum leucanthemum parfait. En coordonnées polaires, dans le plan Z on aura

$$\Phi = Y \text{ et } \rho = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

et à la droite $y = (x - a)m$, dans le plan z, correspond la spirale logarithmique

$$\Phi = (\log \rho - a)m \qquad \text{ou} \qquad \rho = be^k \cdot \Phi$$

en posant $a = \log b$ et $m = \frac{1}{k}$.

Fig. 4.

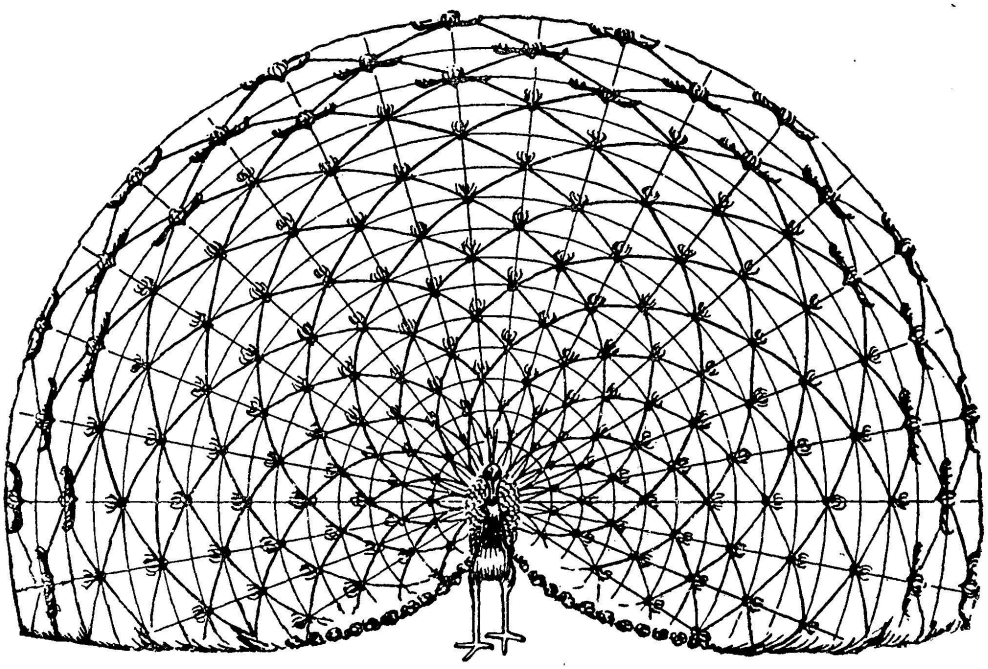

Fig. 5

Dans la fig. 4, les centres des cercles qui correspondent aux cercles tangents dans la direction de A vers C et de B vers C, forment des spirales logarithmiques qui se coupent sous des angles de 60° et 120° respectivement. Une telle spirale est représentée par les centres des cercles hachurés.

En zoologie, il faut encore mentionner les jolies spirales des coquilles du colimaçon, des amonites, des rayonnés réguliers, etc. Mais il n'y a peut-être pas un seul être organisé présentant le caractère géométrique d'une façon si évidente que la queue d'un paon faisant la roue ; chaque plume occupe la position requise avec une précision remarquable, fig. 5.

Les courbes qui se déroulent à gauche et à droite sont des spirales d'Archimède et le dessin complet est symétrique.

Arn. Emch (Soleure).