§ 1. — Applications classiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

NOTE SUR LES USAGES DU PAPIER QUADRILLÉ

§ 1. — Applications classiques.

Le papier quadrillé est formé comme on le sait par le tracé de 2 réseaux orthogonaux de parallèles équidistantes. Si l'on prend 2 d'entre elles comme axes de coordonnées et le côté d'un des carrés du quadrillage comme unité de longueur, on peut aisément placer à l'œil un point dont les 2 coordonnées sont connues et cela avec une approximation de un dixième. La plupart des applications du papier quadrillé sont basées sur ce fait. Ce sont donc simplement des constructions de géométrie analytique à 2 dimensions [1].

De ce nombre sont les constructions classiques de courbes données par leurs équations. On a par exemple tracé ci-contre la parabole $y = x^2$ (fig. 1), en construisant certains points de coordonnées simples. Les constructions de graphiques ou d'abaques [2] sont également facilitées par l'emploi du papier quadrillé, principalement les constructions de graphiques dans lesquelles une des variables ne prend que des valeurs entières. (Statistiques annuelles, mensuelles, etc...)

Dans la construction des courbes algébriques, il est souvent avantageux, au lieu de chercher les coordonnées exactes des points de la courbe, de chercher à placer par rapport à la courbe des points voisins et dont les 2 coordonnées soient entières de façon à avoir des calculs simples. Si, par exemple [3],

[1] Les dimensions les plus habituelles du papier quadrillé sont voisines de $1/2$ cm. On trouve suivant les marques : 0,491 cm., 0,493 cm., 0,496 cm., 0,499 cm., 0,535 cm., etc. Il y a d'ailleurs des quadrillages plus serrés : 0,396 cm., etc., ou plus larges, 0,789 cm. Il existe enfin pour les constructions plus précises du papier dit millimétrique bien connu des physiciens et dont nous n'aurons pas l'occasion de parler ci-dessus.

Note de la Rédaction. — L'usage du papier millimétrique s'est également répandu dans les sections scientifiques des établissements secondaires. Il est indispensable à la résolution graphique des équations.

[2] *Nomographie* de M. M. d'OCAGNE.

[3] Le lecteur est prié ici, comme dans toute la suite de la Note, de vouloir bien refaire au fur et à mesure les diverses figures sur du papier quadrillé.

on veut construire le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 15xy = 0$ il sera commode de remarquer (fig. 2) que les points A et B sont à l'intérieur de la boucle et CDEFGH sont à l'extérieur, tous ces points étant d'ailleurs très voisins de la courbe. Ce dernier procédé, appliqué avec un peu d'habileté, est certainement le plus rapide pour la construction des courbes.

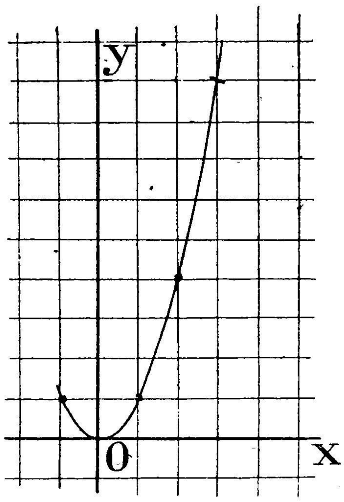

Fig. 1.

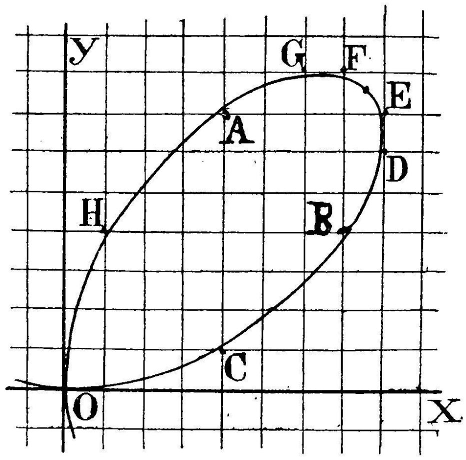

Fig. 2.

La résolution des équations par des intersections de courbes est une application bien connue des tracés graphiques. Par exemple, pour résoudre une équation de la forme $x^2 + px + q = 0$, on construira une fois pour toutes la parabole $y = x^2$ avec grand soin, et on la fera couper par la droite $y + px + q = 0$. Les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées. De même, on résoudra une équation du 3^me^ degré: $x^3 + px + q = 0$ par le tracé d'une parabole cubique $y = x^3$ et d'une droite: $y + px + q = 0$. Sans vouloir insister davantage sur ces exemples classiques, citons cependant comme dernière application à des équations algébriques la résolution de l'équation:

$$x^6 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

par l'intersection de la même parabole cubique $y = x^3$ et de la conique:

$$y^2 + pxy + qy + rx^2 + sx = 0 .$$

Le papier quadrillé sert de façon simple à l'évaluation des aires limitées par un contour quelconque. Reprenons par exemple la boucle du folium de Descartes construit précédemment (fig. 3) et prenons pour unité de longueur le double du côté du quadrillage, pour avoir une approximation suffisante, ce qui donne une aire 4 fois plus grande que l'aire demandée. Traçons 2 contours polygonaux utilisant uniquement des lignes du quadrillage et aussi voisins que possible de la courbe donnée et comptons le nombre des carrés contenus dans chaque polygone. Nous aurons ainsi l'aire de chacun d'eux et il suffira d'en prendre la demi-somme pour avoir approximativement l'aire cherchée. Ici, on pourra par exemple

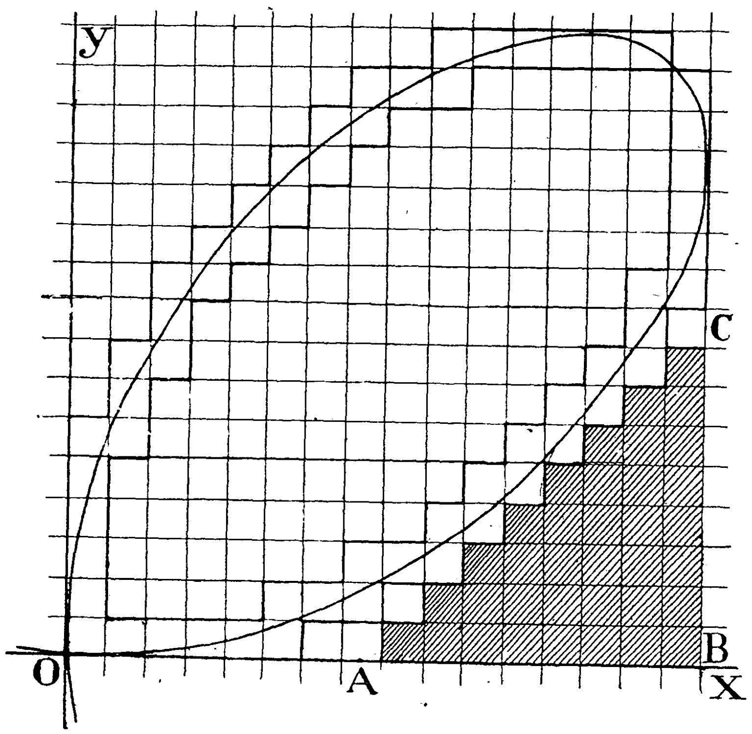

Fig. 3.

remarquer que le polygone recouvert de hachures a une aire égale à $\frac{8 . 9}{2}$. On trouve ainsi que l'aire du polygone qui suit extérieurement la courbe est 175, l'unité d'aire étant la surface de l'un des carrés. Pour avoir la demi-somme cherchée, il suffit de compter le nombre des carrés compris entre les 2 polygones, en comptant 2 carrés pour un, de façon à avoir la moitié de cette aire. On trouve ainsi $29\frac{1}{2}$ et par suite, pour l'aire cherchée, $145\frac{1}{2}$. Il est d'ailleurs plus avantageux de compter le nombre de carrés qui existent entre l'un des 2 polygones et la courbe même, en estimant à l'œil les fractions de carrés, mais ce procédé demande une certaine habitude. Remarquons que ici l'aire considérée est exactement 150.

§ 2. — Points entiers.

Nous appellerons pour abréger *point entier du plan* tout point dont les deux coordonnées sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et point commensurable tout point dont les 2 coordonnées sont des nombres commensurables, l'unité de longueur étant le côté du carré qui sert de base au quadrillage et les axes de coordonnées étant 2 perpendiculaires du quadrillage. Nous nous occuperons presque exclusivement des points entiers. Nous allons voir comment la considération de tels points facilite la construction d'un grand nombre de figures planes, en étudiant auparavant les propriétés les plus élémentaires des droites passant par des points à coordonnées commensurables.

Remarquons d'abord que, étant donné n points commensurables, on peut toujours, avec un rapport d'homothétie convenable, les rendre entiers, en prenant un côté de quadrillage assez petit. Aussi suffira-t-il de prouver, dans certains cas, l'existence de points commensurables répondant à des conditions données, pour en déduire l'existence de points entiers répondant aux mêmes conditions.

Au point de vue qui nous occupe les droites du plan peuvent être rangées en plusieurs catégories : 1° les droites qui ne contiennent aucun point commensurable. Ex. : $x = \sqrt{3}$. 2° les droites qui contiennent un point et un seul à coordonnées commensurables. Ex. : $y = x\sqrt{3}$. 3° les droites qui contiennent 2 et par suite une infinité de points à coordonnées commensurables. Nous supposerons d'ailleurs qu'il y ait au moins un de ces points à coordonnées entières. Il est alors visible qu'une telle droite contient une infinité de points à coordonnées entières. Si, en effet, nous supposons que le point entier de cette droite soit l'origine, et le point commensurable le point $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ le point entier ad, bc fait partie de la même droite et par suite les points $m.\ ad$, $m.\ bc$ en font