NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

Autor(en): **Sawayama, Y.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13522

fini α de droites de Γ, cette congruence est donc le lieu des intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α, α) d'une surface en elle-même.

Soit P un point quelconque de l'espace. Aux plans tangents à V passant par ce point correspondent les plans d'une développable de classe ν, par suite Γ est d'ordre $n\nu$. On a donc $n = \nu = 1$ et Γ est une gerbe de droites.

Lucien Godeaux (Liège).

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

I. — Théorème. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

En étudiant depuis quelques années le théorème que je viens d'énoncer, j'ai trouvé neuf démonstrations différentes qui me semblent encore nouvelles. La *première* de ces démonstrations a déjà été publiée dans *l'Enseignement mathématique* (VII^e année, 1905, n^o 6, p. 479-482) ; j'exposerai donc ici les huit autres à partir de la deuxième.

La 2^e et la 3^e démonstrations ne dépendent ni des théorèmes des aires, ni de ceux de la proportion ; les quatre autres, depuis la 4^e jusqu'à la 7^e sont encore indépendantes des théorèmes relatifs à la proportion.

Dans ce qui suit, je désigne toujours par A′, B′, C′ les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par X, Y, Z les points de contact du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits avec les côtés BC, CA, AB. Il s'agit alors de démontrer que le cercle A′ B′ C′ est tangent au cercle XYZ.

2^e Démonstration.

Je suppose, pour fixer les idées, que le cercle XYZ soit le cercle inscrit.

Si le triangle était isocèle, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ se toucheraient évidemment, je fais donc la démonstration dans le cas où le triangle est quelconque et je suppose, pour plus de commodité, que l'angle A soit plus petit que chacun des angles B et C.

Soient P, Q, R, les orthocentres des triangles AYZ, BZX, CXY. Décrivons les cercles circonscrits aux triangles PYR, PZQ et qui se coupent de nouveau au point L (fig. 1).

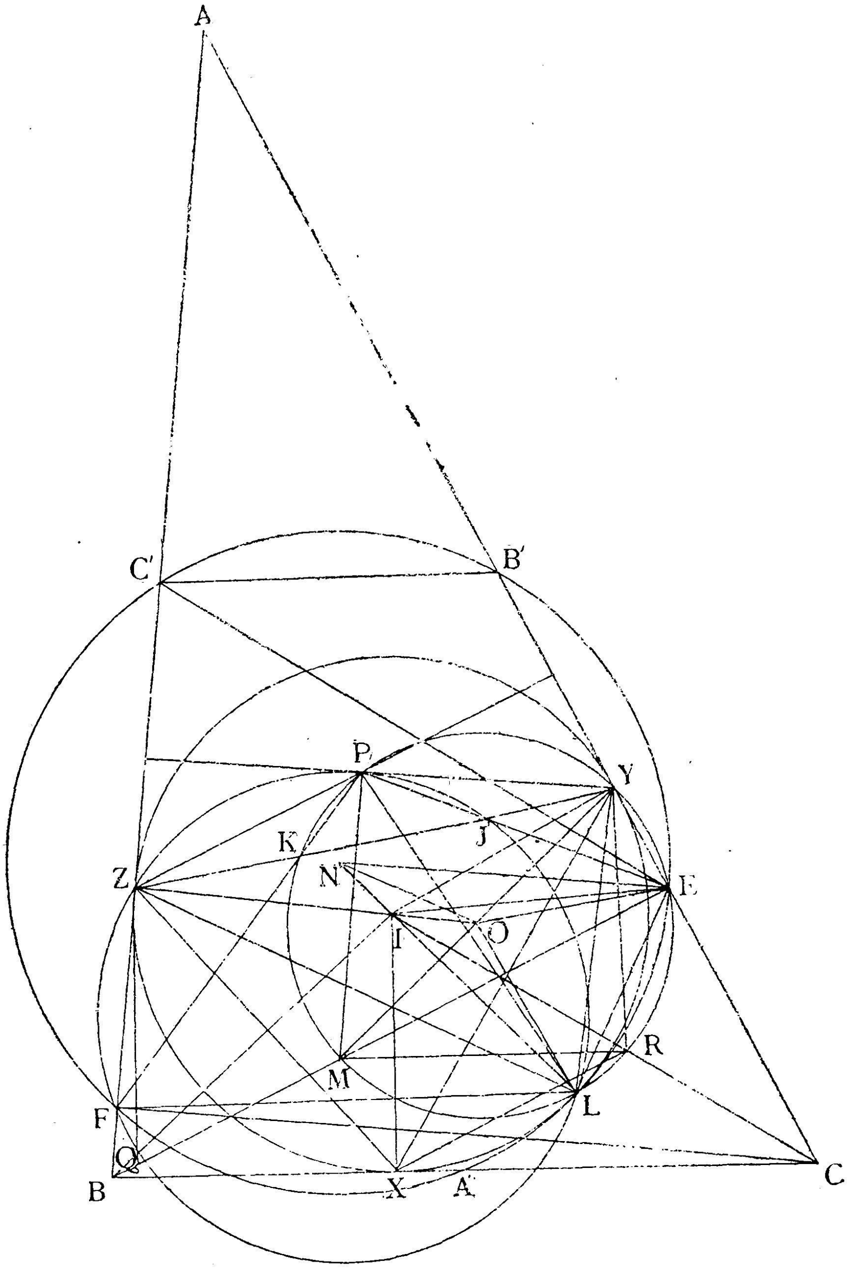

Fig. 1.

Je veux d'abord démontrer que ce point L est situé sur le cercle A′ B′ C′.

Désignons par I le centre du cercle XYZ et par E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C du triangle ABC sur les côtés opposés ; menons par le point Y la parallèle

YM à la droite IB et soit M le point de rencontre de cette parallèle avec la droite BE.

YPZI, YRXI, YMBI étant tous des parallélogrammes, les deux quadrilatères YPMR, IZBX sont égaux, et par suite les angles YPM, YRM qui sont respectivement égaux aux angles IZB, IXB sont droits ; la droite YM est donc le diamètre du cercle PYR et ce cercle passe par le point E. Je remarque en plus que l'angle PMY inscrit dans le segment de cercle PRY est égal à l'angle ZBI.

On peut démontrer de la même façon que le cercle PZQ passe par le point F et que l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ est égal à l'angle YCI.

Si j'appelle J le point de rencontre de la droite PE avec YZ,

$$\widehat{PJZ} = \widehat{EJY} = (2 \text{ droits} - \widehat{CYZ}) - \widehat{JEY} = (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{PMY}$$

$$= (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{ZBI} = \widehat{YCI} .$$

Ce dernier angle YCI étant égal à l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ, on voit que le point J est sur le cercle PZQ.

De même en appelant K le point de rencontre de PF avec YZ, on peut voir que ce point K est sur le cercle PYR.

Or, il est clair que le point J se trouve entre P et E et que le point K entre P et F, il s'en suit que deux points J et F situés sur le cercle PZQ se trouvent l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle PYR, le point de rencontre L est donc dans l'intérieur de l'angle EPF, et l'on a :

$$\widehat{ELF} = \widehat{PLE} + \widehat{PLF} ;$$

mais

$$\widehat{PLE} = \widehat{AYP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ABE} ,$$

et de même

$$\widehat{PLF} = \widehat{AZP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ACF} ,$$

donc

$$\widehat{ELF} = \widehat{ABE} + \widehat{ACF} = 2 . \widehat{ABE} .$$

D'un autre côté, les quatre points B, C, E, F étant sur la même circonférence dont le centre est en A' :

$$\widehat{EA'F} = 2 . \widehat{ABE} , \quad \text{donc} \quad \widehat{ELF} = \widehat{EA'F} ,$$

ce qui montre bien que le point L est sur le cercle A' B' C'.

Je démontrerai ensuite que si le même point L est à l'intérieur de l'angle EPF, il sera aussi à l'intérieur de l'angle YPZ ; donc $\widehat{YLZ}$ $=$ [angle inscrit dans seg. PRY $+$ angle inscrit dans seg. PQZ] $= \widehat{YCI} + \widehat{XBI} = \widehat{YXI} + \widehat{ZXI} = \widehat{YXZ}$.

Le point L est donc aussi sur le cercle XYZ.

Enfin, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ qui ont un point commun L, comme on vient de voir, se toucheront en ce même point.

En effet, soient N le centre du cercle A′ B′ C′ et O celui du cercle PYR c'est-à-dire le point milieu de YM ; je joins chacun de ces points aux points E et L, j'aurai :

$$\widehat{OEM} = \widehat{OME} \ , \quad \text{OM est parallèle à IB} \ ,$$

donc

$$\widehat{OEB} = \widehat{IBE} \quad \text{et} \quad \widehat{IBE} = \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{A}) \ ,$$

mais

$$\widehat{C} = \widehat{AB'C'} \ , \quad \widehat{A} = \widehat{B'EC'} \ ,$$

par suite

$$\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\,\widehat{B'C'E} = \frac{1}{2}\,\widehat{NEB} \ .$$

Donc, la droite OE divise l'angle NEB en deux parties égales et on a la suite d'égalités :

$$\widehat{NLO} = \widehat{NEO} = \widehat{OEB} = \widehat{IBE} = \widehat{IYO} = \widehat{ILO} \ .$$

La dernière égalité $\widehat{NLO} = \widehat{ILO}$ qui montre que les trois points N, I, L sont en ligne droite prouve en même temps que les deux cercles A′B′C′, XYZ sont bien tangents au point L.

Je viens de démontrer le théorème dans le cas du cercle inscrit, en supposant que l'angle A soit plus petit que les angles B et C. Mais, en supprimant cette hypothèse et en prenant pour cercle XYZ le cercle exinscrit, on pourra faire la démonstration d'une façon presque entièrement analogue ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Les trois cercles QXR, RYP, PZQ se coupent en un même point.

3e Démonstration.

III. — Soient D, E, F les pieds des perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C du triangle aux côtés opposés (fig. 2).

Prenons sur le côté AC de l'angle A, AK $=$ AB et appelons J le point de rencontre avec BK de la bissectrice de l'angle A.

Les points C′, J, A′ étant respectivement les milieux de BA, BK, BC sont situés sur une même droite parallèle à AC.

Les deux points E, F se trouvent sur une même circonférence qui a BC pour diamètre, les deux cordes A′E, A′F du cercle A′B′C′ sont donc égales ; par suite C′J divise l'angle BC′E en deux parties égales.

Il en résulte que le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E, compris dans l'angle A et que le second point de

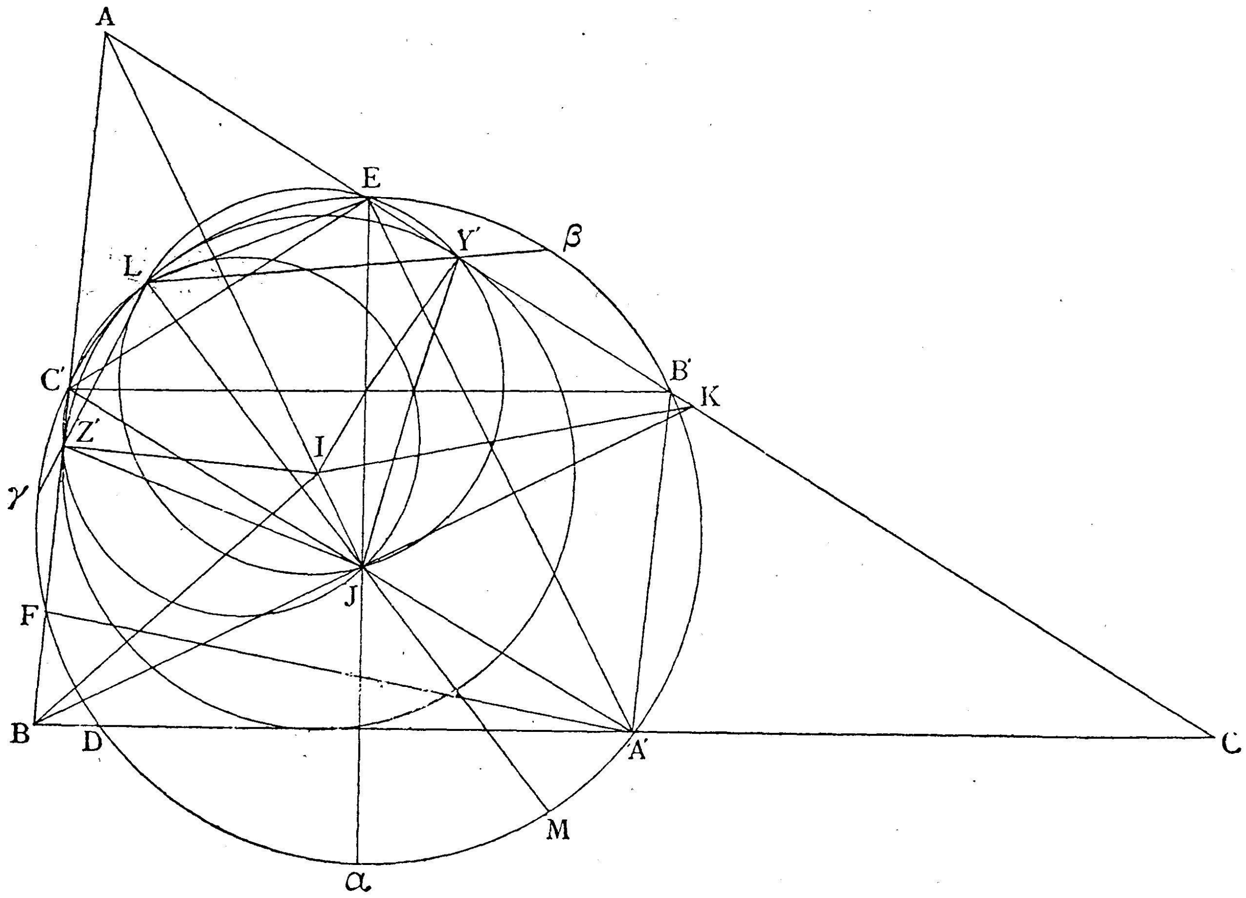

Fig. 2.

rencontre α de EJ avec le cercle A′B′C′ est le milieu de l'arc B′A′C′.

Supposons pour le moment que le cercle XYZ soit le cercle inscrit et que les grandeurs de trois angles du triangle soient dans l'ordre suivant :

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}.$$

Soient M le milieu de l'arc EA′C′ et L le second point de rencontre de MJ avec la circonférence A′B′C′.

Puisque

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C},$$

on a

$$\widehat{B} > \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{A}) > \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$$

et comme

$$\widehat{C'B'A'} = \widehat{B} ,$$

$$\widehat{C'LM} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{EB'C'}) = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C}) = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}) ,$$

$$\widehat{C'E\alpha} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C'A'B'}) = \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

on a :

$$\widehat{C'B'A'} > \widehat{C'LM} > \widehat{C'E\alpha} .$$

Donc le point M se trouve sur l'axe $A'\alpha$ et par suite L se trouve sur l'arc C'E.

Soient β le milieu de l'arc conjugué de l'arc B'A'E et γ le milieu de l'arc conjugué de l'arc C'A'F et soient Y' et Z' les points de rencontre respectifs de $L\beta$, $L\gamma$ avec AC, AB, on a :

$$\widehat{JLY'} = \widehat{JLE} - \widehat{\beta LE} ,$$

par suite l'angle JLY' est mesuré par

$$\frac{1}{2} \text{ arc } EA'C' - \frac{1}{2} \text{ arc } E\beta B' = \frac{1}{2} \text{ arc } B'A'C' ,$$

c'est-à-dire est égal à l'angle JEY' ; ce qui prouve que le quadrilatère JLEY' est inscriptible à un cercle.

De même, le quadrilatère JLC'Z' est inscriptible.

Donc

$$\widehat{JY'C} = \widehat{JLE} , \quad \widehat{JLC'} = \widehat{JZ'B} ,$$

les deux triangles AJY', AJZ' sont par suite égaux ; d'où l'on a :

$$AY' = AZ' .$$

Si donc on décrivait un cercle ayant son centre I sur AJ et tangent en Y' à AC, ce cercle serait nécessairement tangent en Z' à AB.

Or, puisque la différence des angles inscrits qui interceptent les arcs $\beta A'\gamma$ et $\beta L\gamma$ est égal à la différence des angles qui interceptent les arcs FA'B' et C'LE c'est-à-dire à l'angle A et que la somme des premiers angles est égale à deux droits, on a :

$$\beta L\gamma = 1 \text{ droit} + \frac{A}{2} ;$$

ce qui montre que le cercle I passe par le point L.

Le point de contact Y' du cercle I avec la sécante EB' du cercle

A′B′C′, le point de rencontre de ces deux cercles et le milieu β de l'arc EB′ étant ainsi situés sur une même droite, ces deux cercles se touchent au point L.

Il nous reste à prouver que le cercle I est le cercle inscrit au triangle ABC.

Or, chacun des angles IY′K, IJK étant droit, le quadrilatère JIY′K est inscriptible, on a donc :

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IJY'} = \widehat{EJY'} + \widehat{AJE} ;$$

mais les quatre points E, L, J, Y′ étant sur une même circonférence, on a :

$$\widehat{EJY'} = \widehat{ELY'} = \widehat{EL\beta} = \frac{1}{2} \widehat{EC'B'}$$

et J étant le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E :

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2} \widehat{AC'E} ,$$

donc

$$\widehat{IKY'} = \frac{1}{2} (\widehat{EC'B'} + \widehat{AC'E}) = \frac{1}{2} \widehat{AC'B'} = \frac{1}{2} \widehat{B} .$$

D'ailleurs,

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IBA} , \qquad \text{donc} \qquad \widehat{IBA} = \frac{1}{2} \widehat{B} ,$$

Le point I est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

On a pu ainsi démontrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Si, au lieu de supposer $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ comme je viens de faire, on suppose seulement $\widehat{B} > \widehat{C}$ et qu'à la place de M, β, γ, on mette les points diamétralement opposés, on pourra démontrer d'une façon presque analogue que le cercle A′B′C′ est tangent au cercle exinscrit dans l'angle A.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E.

4e Démonstration.

IV. — Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre de ce triangle, N le centre du cercle A′B′C′ et I le centre du cercle XYZ. (Si le cercle XYZ est le cercle exinscrit, ce cercle sera dans la suite celui qui est situé dans l'angle BAC à moins qu'on n'indique le contraire). (Fig. 3).

Soient α le second point d'intersection de la droite AI avec le cercle ABC, P le second point d'intersection de la droite αO avec le même cercle, D le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AC et E le point d'intersection de la droite A'D avec la droite AP.

Soient encore L le milieu de la droite AH et F, K, M les points où la droite menée par le point L perpendiculairement à la droite AI coupent respectivement les droites αA, αP, A'E.

Les deux points D et A' étant situés sur la même circonférence de diamètre CP et les deux angles A'PC, αAC dans le cercle O interceptant le même arc Cα, on a :

$$\widehat{A'DC} = \widehat{A'PC} = \widehat{\alpha AC} .$$

Donc A'D est parallèle à αA et est par suite perpendiculaire à LK.

Or, les deux quadrilatères A'LAO et LKPA sont des parallélogrammes (si l'angle A était droit, les deux droites A'L et LK coïn-

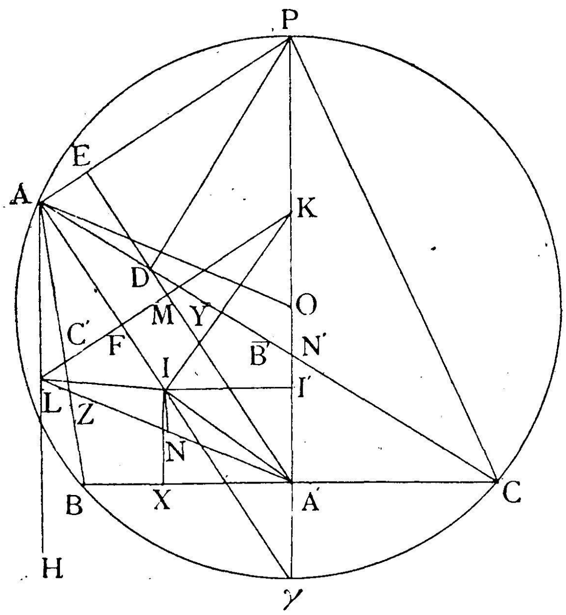

Fig. 3.

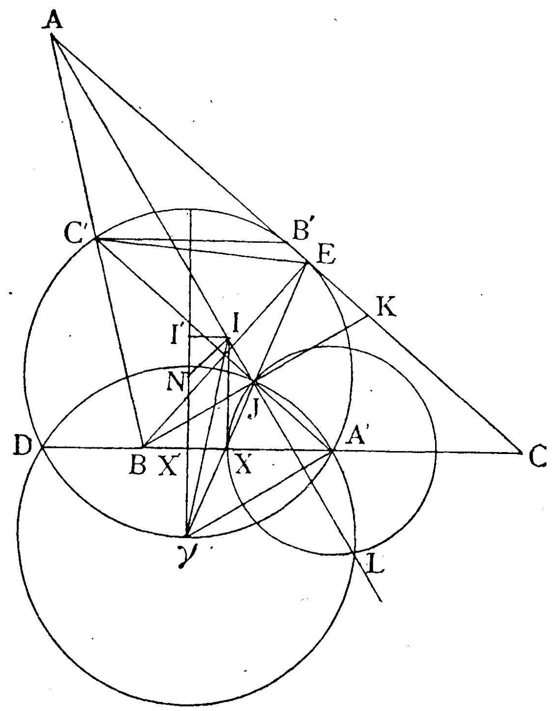

Fig. 4.

cideraient respectivement avec OA et AP), le triangle A'LK est donc un triangle isoscèle, égal au triangle OAP; donc la base LK de ce triangle sera divisée en M en deux parties égales par la droite A'M.

En supposant maintenant $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \,.\, FM = 2\,AP \,.\, AE \;;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \,.\, AE = \overline{AD}^2 ,$$

et en appelant I′ le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A′P et N′ le milieu de A′K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = XA' = II' ,$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2 \,.\, \overline{XA'}^2 = \overline{XA'}^2 + \overline{II'}^2 .$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{XA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{I'K}^2 ,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{XA'}^2 + \overline{IX}^2) = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2 \,.\, \overline{I'N'}^2 + 2 \,.\, \overline{N'A'}^2 = 2 \,.\, \overline{I'N'}^2 + 2 \,.\, \overline{NA'}^2 .$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA′ ;

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2 \,.\, \overline{IN}^2 + 2 \,.\, \overline{NA'}^2 .$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2 \,.\, \overline{IN}^2 = 2 \,.\, \overline{I'N'}^2 .$$

Donc

$$IN = I'N' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

5ᵉ Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs côtés opposés, I le centre du cercle XYZ, J et K les points de rencontre respectifs avec les droites AI et AC de la droite menée de B perpendiculairement à AI, et enfin α le second point de rencontre de la droite EJ avec le cercle A′B′C′. (Fig. 4.)

On voit sur la figure que les quatre points α, A′, E, C′ sont sur la même circonférence, que le point J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BEK, que C′A′ et AC sont parallèles et que J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E comme j'ai indiqué dans la 3^e^ démonstration ; et d'après ces quatre conditions on doit avoir :

$$\widehat{\alpha A' J} = \widehat{\alpha E C'} = \widehat{\alpha E K} = \widehat{JKE} = \widehat{BJC'} . \qquad (1)$$

Donc αA′ est parallèle à BK et par suite perpendiculaire à AI. Le second point de rencontre des cercles dont les centres sont respectivement en α et A′ et qui se coupent d'abord en J est donc sur la droite AI ; j'appelle L ce second point de rencontre.

Le parallélisme des droites C′A′ et AC donne :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha E K} , \qquad \text{mais} \qquad \widehat{\alpha E K} = \widehat{\alpha A' J}$$

d'après (1), donc :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha A' J} , \qquad \text{par suite} \qquad \alpha A' = \alpha J .$$

D'ailleurs, comme le point α est le milieu de l'arc B′A′C′ et que B′C′ et A′D sont parallèles, ce point α est aussi le milieu de l'arc A′D.

Il s'en suit que le cercle dont le centre est en α et ayant αJ pour rayon passe par les deux points A′ et D.

Ensuite les deux longueurs A′X et A′J étant chacune égale à la demi-différence de AC et AB sont égales entre elles.

Donc, le point X est sur la circonférence de centre A′ et de rayon A′J.

Or, dans le cercle JA′L, on a :

$$\overline{\alpha I}^2 - \overline{\alpha A'}^2 = IJ \, . \, IL ,$$

mais IX étant tangent au cercle JX′L,

$$IJ \, . \, IL = \overline{IX}^2 , \qquad \text{donc :} \qquad \overline{\alpha I}^2 = \overline{IX}^2 + \overline{\alpha A'}^2 . \qquad (2)$$

Maintenant, en désignant par N le centre du cercle A′B′C′, par I′ le pied de la perpendiculaire abaissée du point I à la droite

αN et par X′ le point de rencontre de αN et de A′D, on a dans le triangle αIN

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,(\mathrm{I'X'} \pm \alpha\mathrm{X'})$$

$$= \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{I'X'} - 2\,.\,\alpha\mathrm{N}\,.\,\alpha\mathrm{X'}$$

$$= \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{IX} - \overline{\alpha\mathrm{A'}}^2\,. \qquad (3)$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\mathrm{IX}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{IX} = (\alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX})^2\,,$$

on a donc :

$$\mathrm{IN} = \alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX}\,,$$

ce qui montre que les deux cercles N, I se touchent.

Corollaire. — J est également distant des trois côtés du triangle A′ED.

6e Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5e démonstration, menons la droite passant par les points X et J. (Fig. 5.)

Puisque A′J et A′X sont égaux et que A′J et CY sont parallèles, les deux triangles A′XJ et CXY sont des triangles isocèles et équiangulaires; donc XY et XJ coïncident entre eux.

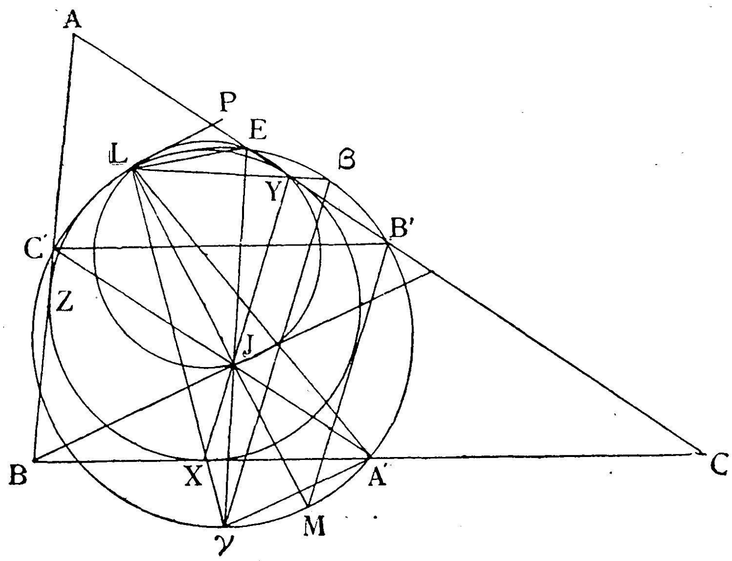

Fig. 5.

Menons la droite qui passe par deux points α et X et qui rencontre de nouveau en L le cercle A′B′C′.

Les deux angles αLA′ et αA′X étant égaux, le cercle qui passe par les trois points A′, X, L touche la droite αA′ au point A′ ; donc

$$\alpha\mathrm{X}\,.\,\alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{A'}}^2\,.$$

Mais αJ $=$ αA′ comme on a indiqué dans la 5e démonstration, donc :

$$\alpha\mathrm{X}\,.\,\alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{J}}^2\,,$$

ce qui montre que la droite αJ touche le cercle passant par les trois points X, J, L et que par suite les deux angles αLJ, αJX sont égaux.

Si maintenant on mène par le point B′ deux droites respectivement parallèles aux deux droites XY et CB et coupant de nouveau le cercle A′B′C′ en M et C′, la droite XY faisant des angles égaux avec deux droites BC et AC, B′M divise en deux parties égales un des angles que font entre elles deux droites B′C′ et B′E ; donc l'arc C′M est la moitié de l'arc C′E. De plus, comme l'arc C′α est la moitié de l'arc C′B′, l'arc αM est égal à la moitié de l'arc B′E (si le cercle XYZ était le cercle inscrit, l'arc αM aurait le même sens que l'arc B′E intercepté par l'angle inscrit B′C′E, et si le même cercle était exinscrit, l'arc Mα aurait le même sens que l'arc B′A′C′).

Si donc on mène du point α la droite parallèle à la droite XY, cette droite passera par le milieu β de l'arc B′E.

Les deux angles αJX et EJY sont égaux ou supplémentaires suivant que le cercle XYZ était inscrit ou exinscrit.

Dans ce qui suit, je suppose, pour plus de commodité, que l'angle B soit plus grand que l'angle C si XYZ était le cercle inscrit et plus petit que C si ce cercle était exinscrit.

Or, l'angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant $\frac{1}{2}$ arc B′E = arc αM suivant que ce cercle XYZ est inscrit ou exinscrit ; donc l'angle αLJ est égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc αM et par suite la droite LJ passe par le point M.

Donc :

$$2 \text{ droits} - \widehat{JLE} = \widehat{MBE} = \widehat{JYE}$$

et le quadrilatère EYJL est inscriptible.

Donc :

$$\widehat{ELY} = \widehat{EJY} = 2 \text{ droits} - \widehat{J\alpha\beta} .$$

Ce dernier angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant la moitié de l'arc B′E, suivant que le cercle XYZ est inscrit ou exinscrit ; donc la droite LY passe par le point β.

Les deux arcs αM et βE étant égaux, les deux arcs $\alpha\beta$ et ME seront aussi égaux, d'où :

$$\widehat{XLY} = \widehat{JLE} = 2 \text{ droits} - \widehat{XYE} ,$$

donc le point L est situé sur le cercle XYZ.

Si ensuite on mène au point L la tangente au cercle A′B′C′ et qu'on prenne sur cette tangente un point P de façon que les deux points P et α soient de part et d'autre de la droite $L\beta$, on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} ,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7^e^ Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5^e^ démonstration pour désigner les différents points de la figure ; de plus j'appelle J' le point de rencontre des deux droites XY et $\alpha B'$. (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

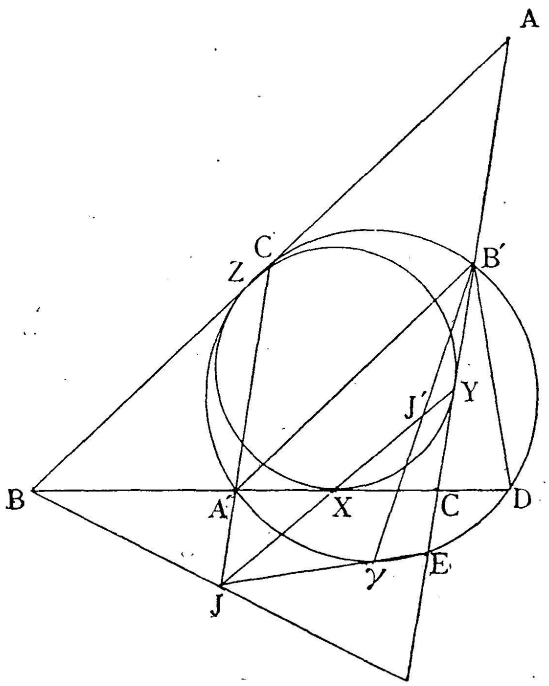

Fig. 6.

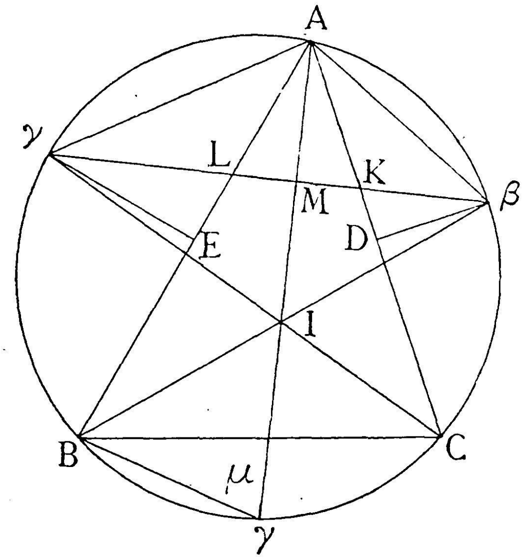

Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6^e^ démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites αE et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc $B'A'E$ si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc $B'A'E$ si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle A′B′C′ ; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites αE et αB′ sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6e démonstration, on pourra prouver que les deux cercles A′B′C′ et XYZ se touchent entre eux.

8e Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par r et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient β, γ les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de β sur AC et de γ sur AB; et K, L, M les points de rencontre de $\beta\gamma$ avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites βA et γA étant respectivement égales aux droites βI et γI, la droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales; donc les deux triangles βAM et AγE sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles βDA et AMγ donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire [1] :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \qquad \text{d'où} \qquad \beta D . \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D . \gamma E = \overline{AI}^2 \tag{1}$$

[1] Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé Shiraishi Nagatada dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu.*

Maintenant soit α le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement μ, μ', μ'' la distance de α à la corde BC et les distances βD et γE. D'après les résultats précédents :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = 4\Sigma\mu'\mu'' .$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma\mu^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma(\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4}a^2)$$

$$= \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu)^2 - 2R\Sigma\mu = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu - R)^2 - R^2 .$$

Mais, on a :

$$\Sigma\mu = 2R \mp r . \qquad (2)$$

D'où

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc [1] :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{2}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma\overline{AO}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 .$$

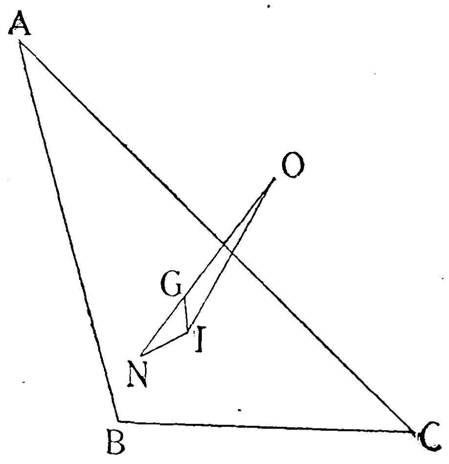

Fig. 8.

[1] Lorsque r représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7e édition, 1re partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de $\Sigma \mathrm{AI}^2$ l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{\mathrm{IG}}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r .$$

Donc :

$$2\overline{\mathrm{IN}}^2 + \mathrm{R}^2 \mp 2\mathrm{R}r = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r + \frac{3}{2}\mathrm{R}^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où : $\overline{\mathrm{IN}}^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r\right)^2$, par suite $\mathrm{IN} = \frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r$.

Donc les deux cercles A'B'C' et XYZ se touchent, c. q. f. d.

Corollaire. — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4\mathrm{R}r = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma \mathrm{AI}^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \qquad \text{ou} \qquad p^2 .$$

9e Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

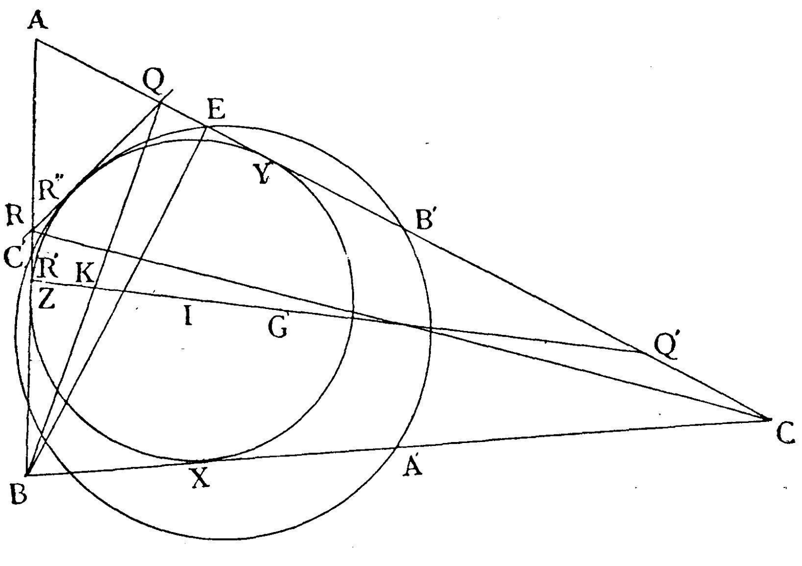

Fig. 9.

Représentons respectivement par a, b, c les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de rencontre respectifs de l'axe radical des deux cercles ABC et XYZ avec AC et AB. (Fig. 9.)

On a alors d'après une propriété de l'axe radical :

$$\mathrm{QB'}.\,\mathrm{QE} = \overline{\mathrm{QY}}^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{QB'}.\,(\mathrm{QB'} - \mathrm{EB'}) = (\mathrm{QB'} - \mathrm{YB'})^2\,,$$

d'où

$$\mathrm{QB'}.\,(2\mathrm{YB'} - \mathrm{EB'}) = \overline{\mathrm{YB'}}^2\,.$$

Par suite

$$\frac{\mathrm{QB'}}{\mathrm{YB'}} = \frac{\mathrm{YB'}}{2\mathrm{YB'} - \mathrm{EB'}} \tag{1}$$

mais

$$\mathrm{YB'} = \frac{1}{2}(\mp a\; c) \tag{2}$$

De plus :

$$2b\,.\,\mathrm{EB'} = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 2(\pm a + c)\,.\,\mathrm{YB'}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{YB'}}{\mathrm{EB'}} = \frac{b}{\mp a + c}$$

donc :

$$\frac{\mathrm{YB'}}{2\mathrm{YB'} - \mathrm{EB'}} = \frac{b}{\mp a + 2b - c}\,. \tag{3}$$

Des relations (1), (2), (3), on tire :

$$\frac{\mathrm{QB'}}{\frac{1}{2}(\mp a - c)} = \frac{\frac{1}{2}b \text{ ou } \mathrm{AB'}}{\frac{1}{2}(\mp a + 2b - c)}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{QB'}}{\mathrm{AB'}} = \frac{\pm a - c}{\mp a + 2b - c}\,.$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{AB'} - \mathrm{QB'}}{-(\mathrm{QB'} + \mathrm{AB'})} = \frac{\mp a - b}{b - c}\,. \tag{4}$$

En échangeant les segments de la droite AC et les segments correspondants de la droite AB, on aura :

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{BR}} = \frac{\mp a - c}{c - b} = \frac{c \mp a}{b - c}\,. \tag{5}$$

Appelons maintenant Q' le conjugué isotomique du point Q par rapport au côté AC du triangle ABC et R' le conjugué isotomique du point R par rapport aux côtés AB du même triangle ; soit K le point où la droite Q′R′ coupe la droite BQ; on a d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{BK}{QK}\cdot\frac{QQ'}{AQ'}\cdot\frac{AR'}{BR'}=1$$

et comme

$$\frac{QQ'}{AQ'}=\frac{-CQ+CQ'}{-CQ}=\frac{CQ+AQ}{CQ}\,,\quad \frac{AR'}{BR'}=\frac{BR}{AR}\,.$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{BK}{QK}\cdot\frac{\mp a-c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{\mp a+c}=1\,,$$

d'où :

$$\frac{BK}{QK}=-1\,.$$

Donc K est le milieu du segment BQ.

De même la droite Q′R′ rencontre le segment CR en son milieu.

Si ensuite on affecte de signes les perpendiculaires abaissées des trois points A, B et C sur la droite Q′R′ et qu'on les représente par L, M et N, on a en remarquant (4) et (5) :

$$\frac{L}{b-c}=\frac{M}{c\mp a}=\frac{N}{\pm a-b}\,.$$

Mais

$$\pm a\,.(b-c)+b\,.(c\mp a)+c\,.(\pm a-b)=0\,,$$

d'où

$$\pm a\,.\,L+b\,.\,M+c\,.\,N=0\,.$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour multiples $\pm a$, b, c, c'est-à-dire par le centre I du cercle XYZ.

Donc, la droite QR est tangente au cercle XYZ, car si l'on suppose que QR ne soit pas tangente au cercle XYZ et que la tangente (autre que AC) menée du point Q au cercle XYZ rencontre la droite AB en un point R″, les milieux des deux segments BQ et CR″ et le point I seront, comme on sait, en ligne droite; de plus, puisque, comme on vient de le démontrer, le milieu du segment BQ, celui de CR et le point I sont aussi en ligne droite et que le milieu du segment BQ et le point I ne coïncident pas, ces deux points déterminent une droite et le point I sera situé sur la droite passant par le milieu des deux segments CR et CR″, c'est-à-dire sur A′B′, ce qui est évidemment contraire à la vérité.

Corollaire I. — P, Q, R étant les points où la tangente commune au cercle des neuf points A′B′C′ d'un triangle ABC et au cercle inscrit ou exinscrit XYZ, coupe les trois côtés de ce triangle et P′, Q′, R′ les conjugués isotomiques de P, Q, R par rapport à ces côtés, la droite qui passe par P′, Q′, R′ passe aussi par les milieux des diagonales du quadrilatère complet que forment les trois côtés du triangle et la tangente commune précédente et par l'un des points de Nagel du triangle.

Démonstration : On a déjà démontré que la droite Q′R′ passe par les milieux des segments BQ, CR et le centre I du cercle XYZ ; et puisque l'anti-complémentaire du point I est un des points de Nagel, il suffit de prouver ici que Q′R′ passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Or, de

$$(b - c) + (c \mp a) + (\pm a - b) = 0 ,$$

on tire

$$L + M + N = 0 .$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour les multiples (chacun vaut 1), c'est-à-dire par le point G.

Corollaire II. — Les rapports des segments portés sur le côté AC du triangle ABC sont :

$$\frac{QC}{b - c} = \frac{Q'Q}{c \mp a} = \frac{QA}{\pm a - b} .$$

Y. Sawayama (Tokio).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Milan, au commencement d'octobre 1911. La date et le programme seront publiés dans un prochain numéro.

Etats-Unis. — La sous-commission américaine vient de publier le 3^{me} fascicule de son *Bulletin*. Il est consacré à un rapport préparatoire concernant la préparation du corps enseignant des collèges et des universités : N° 3. *Provisional Report of the Sub-*