

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1911)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS  
**Autor:** Sawayama, Y.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13522>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

fini  $\alpha$  de droites de  $\Gamma$ , cette congruence est donc le lieu des intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices  $(\alpha, \alpha)$  d'une surface en elle-même.

Soit P un point quelconque de l'espace. Aux plans tangents à V passant par ce point correspondent les plans d'une développable de classe  $\nu$ , par suite  $\Gamma$  est d'ordre  $n\nu$ . On a donc  $n = \nu = 1$  et  $\Gamma$  est une gerbe de droites.

LUCIEN GODEAUX (Liège).

## NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

I. — THÉORÈME. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

En étudiant depuis quelques années le théorème que je viens d'énoncer, j'ai trouvé neuf démonstrations différentes qui me semblent encore nouvelles. La première de ces démonstrations a déjà été publiée dans *l'Enseignement mathématique* (VII<sup>e</sup> année, 1905, n<sup>o</sup> 6, p. 479-482) ; j'exposerai donc ici les huit autres à partir de la deuxième.

La 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> démonstrations ne dépendent ni des théorèmes des aires, ni de ceux de la proportion ; les quatre autres, depuis la 4<sup>e</sup> jusqu'à la 7<sup>e</sup> sont encore indépendantes des théorèmes relatifs à la proportion.

Dans ce qui suit, je désigne toujours par  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par X, Y, Z les points de contact du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits avec les côtés BC, CA, AB. Il s'agit alors de démontrer que le cercle  $A' B' C'$  est tangent au cercle XYZ.

### 2<sup>e</sup> Démonstration.

Je suppose, pour fixer les idées, que le cercle XYZ soit le cercle inscrit.

Si le triangle était isocèle, les deux cercles  $A' B' C'$ , XYZ se

toucheraient évidemment, je fais donc la démonstration dans le cas où le triangle est quelconque et je suppose, pour plus de commodité, que l'angle A soit plus petit que chacun des angles B et C.

Soient P, Q, R, les orthocentres des triangles AYZ, BZX, CXY. Décrivons les cercles circonscrits aux triangles PYR, PZQ et qui se coupent de nouveau au point L (fig. 1).

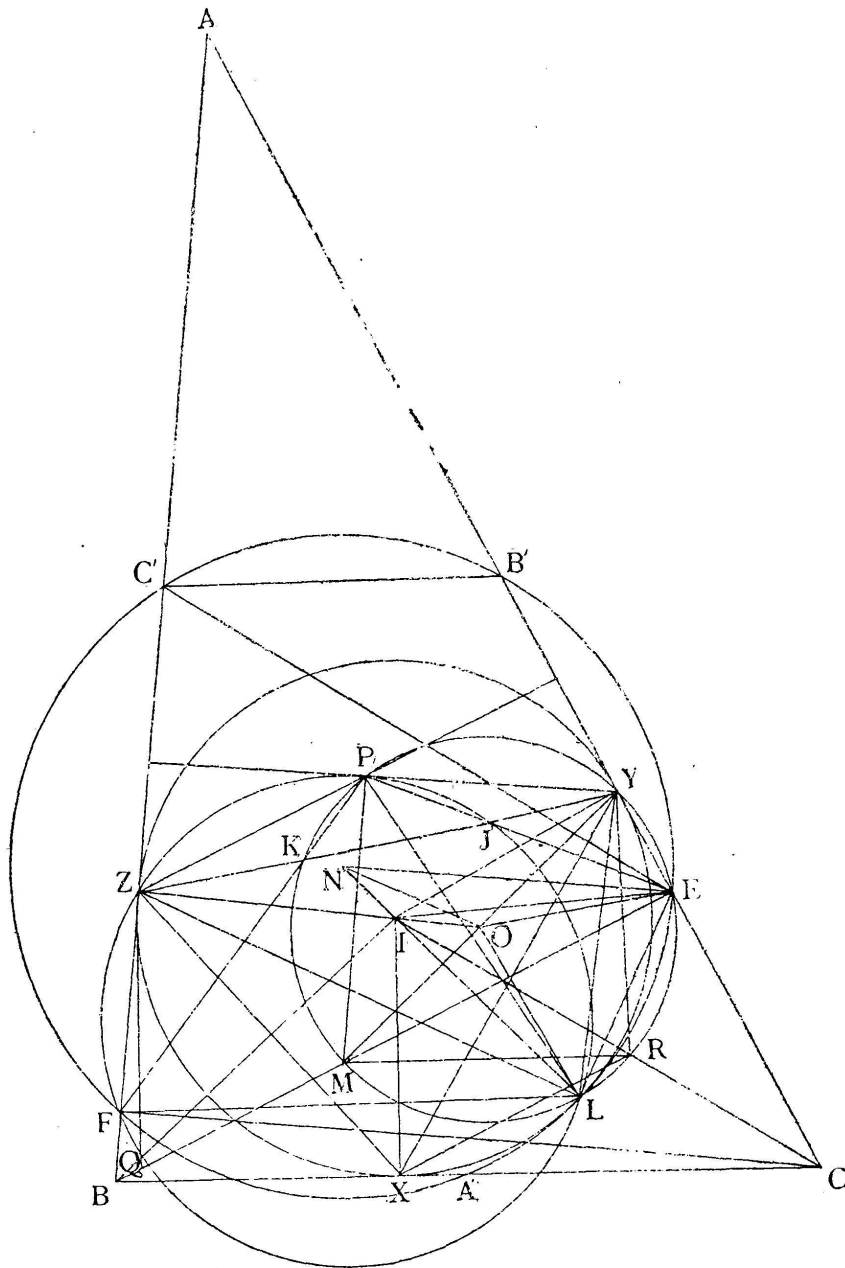


Fig. 1.

Je veux d'abord démontrer que ce point L est situé sur le cercle  $A' B' C'$ .

Désignons par I le centre du cercle XYZ et par E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C du triangle ABC sur les côtés opposés; menons par le point Y la parallèle

YM à la droite IB et soit M le point de rencontre de cette parallèle avec la droite BE.

YPZI, YRXI, YMBI étant tous des parallélogrammes, les deux quadrilatères YPMR, IZBX sont égaux, et par suite les angles YPM, YRM qui sont respectivement égaux aux angles IZB, IXB sont droits ; la droite YM est donc le diamètre du cercle PYR et ce cercle passe par le point E. Je remarque en plus que l'angle PMY inscrit dans le segment de cercle PRY est égal à l'angle ZBI.

On peut démontrer de la même façon que le cercle PZQ passe par le point F et que l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ est égal à l'angle YCI.

Si j'appelle J le point de rencontre de la droite PE avec YZ,

$$\begin{aligned} \widehat{PJZ} = \widehat{EJY} &= (2 \text{ droits} - \widehat{CZY}) - \widehat{JEY} = (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{PMY} \\ &= (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{ZBI} = \widehat{YCI}. \end{aligned}$$

Ce dernier angle YCI étant égal à l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ, on voit que le point J est sur le cercle PZQ.

De même en appelant K le point de rencontre de PF avec YZ, on peut voir que ce point K est sur le cercle PYR.

Or, il est clair que le point J se trouve entre P et E et que le point K entre P et F, il s'en suit que deux points J et F situés sur le cercle PZQ se trouvent l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle PYR, le point de rencontre L est donc dans l'intérieur de l'angle EPF, et l'on a :

$$\widehat{ELF} = \widehat{PLE} + \widehat{PLF} ;$$

mais

$$\widehat{PLE} = \widehat{AYP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ABE},$$

et de même

$$\widehat{PLF} = \widehat{AZP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ACF},$$

donc

$$\widehat{ELF} = \widehat{ABE} + \widehat{ACF} = 2 \cdot \widehat{ABE}.$$

D'un autre côté, les quatre points B, C, E, F étant sur la même circonférence dont le centre est en A' :

$$\widehat{EA'F} = 2 \cdot \widehat{ABE}, \text{ donc } \widehat{ELF} = \widehat{EA'F},$$

ce qui montre bien que le point L est sur le cercle A' B' C'.

Je démontrerai ensuite que si le même point L est à l'intérieur de



l'angle EPF, il sera aussi à l'intérieur de l'angle YPZ ; donc  $\widehat{YLZ} = [\text{angle inscrit dans seg. PRY} + \text{angle inscrit dans seg. PQZ}] = \widehat{YCI} + \widehat{XBI} = \widehat{YXI} + \widehat{ZXI} = \widehat{YXZ}$ .

Le point L est donc aussi sur le cercle XYZ.

Enfin, les deux cercles A' B' C', XYZ qui ont un point commun L, comme on vient de voir, se toucheront en ce même point.

En effet, soient N le centre du cercle A' B' C' et O celui du cercle PYR c'est-à-dire le point milieu de YM ; je joins chacun de ces points aux points E et L, j'aurai :

$$\widehat{OEM} = \widehat{OME}, \quad OM \text{ est parallèle à } IB,$$

donc

$$\widehat{OEB} = \widehat{IBE} \quad \text{et} \quad \widehat{IBE} = \frac{1}{2} (\widehat{C} - \widehat{A}),$$

mais

$$\widehat{C} = \widehat{AB'C'}, \quad \widehat{A} = \widehat{B'EC'},$$

par suite

$$\widehat{IBE} = \frac{1}{2} \widehat{B'C'E} = \frac{1}{2} \widehat{NEB}.$$

Donc, la droite OE divise l'angle NEB en deux parties égales et on a la suite d'égalités :

$$\widehat{NLO} = \widehat{NEO} = \widehat{OEB} = \widehat{IBE} = \widehat{IYO} = \widehat{ILO}.$$

La dernière égalité  $\widehat{NLO} = \widehat{ILO}$  qui montre que les trois points N, I, L sont en ligne droite prouve en même temps que les deux cercles A' B' C', XYZ sont bien tangents au point L.

Je viens de démontrer le théorème dans le cas du cercle inscrit, en supposant que l'angle A soit plus petit que les angles B et C. Mais, en supprimant cette hypothèse et en prenant pour cercle XYZ le cercle exinscrit, on pourra faire la démonstration d'une façon presque entièrement analogue ; le théorème est donc démontré.

*Corollaire.* — Les trois cercles QXR, RYP, PZQ se coupent en un même point.

### 3<sup>e</sup> Démonstration.

III. — Soient D, E, F les pieds des perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C du triangle aux côtés opposés (fig. 2).

Prenons sur le côté AC de l'angle A,  $AK = AB$  et appelons J le point de rencontre avec BK de la bissectrice de l'angle A.

Les points  $C', J, A'$  étant respectivement les milieux de  $BA, BK, BC$  sont situés sur une même droite parallèle à  $AC$ .

Les deux points  $E, F$  se trouvent sur une même circonférence qui a  $BC$  pour diamètre, les deux cordes  $A'E, A'F$  du cercle  $A'B'C'$  sont donc égales; par suite  $C'J$  divise l'angle  $BC'E$  en deux parties égales.

Il en résulte que le point  $J$  est le centre du cercle exinscrit au triangle  $AC'E$ , compris dans l'angle  $A$  et que le second point de

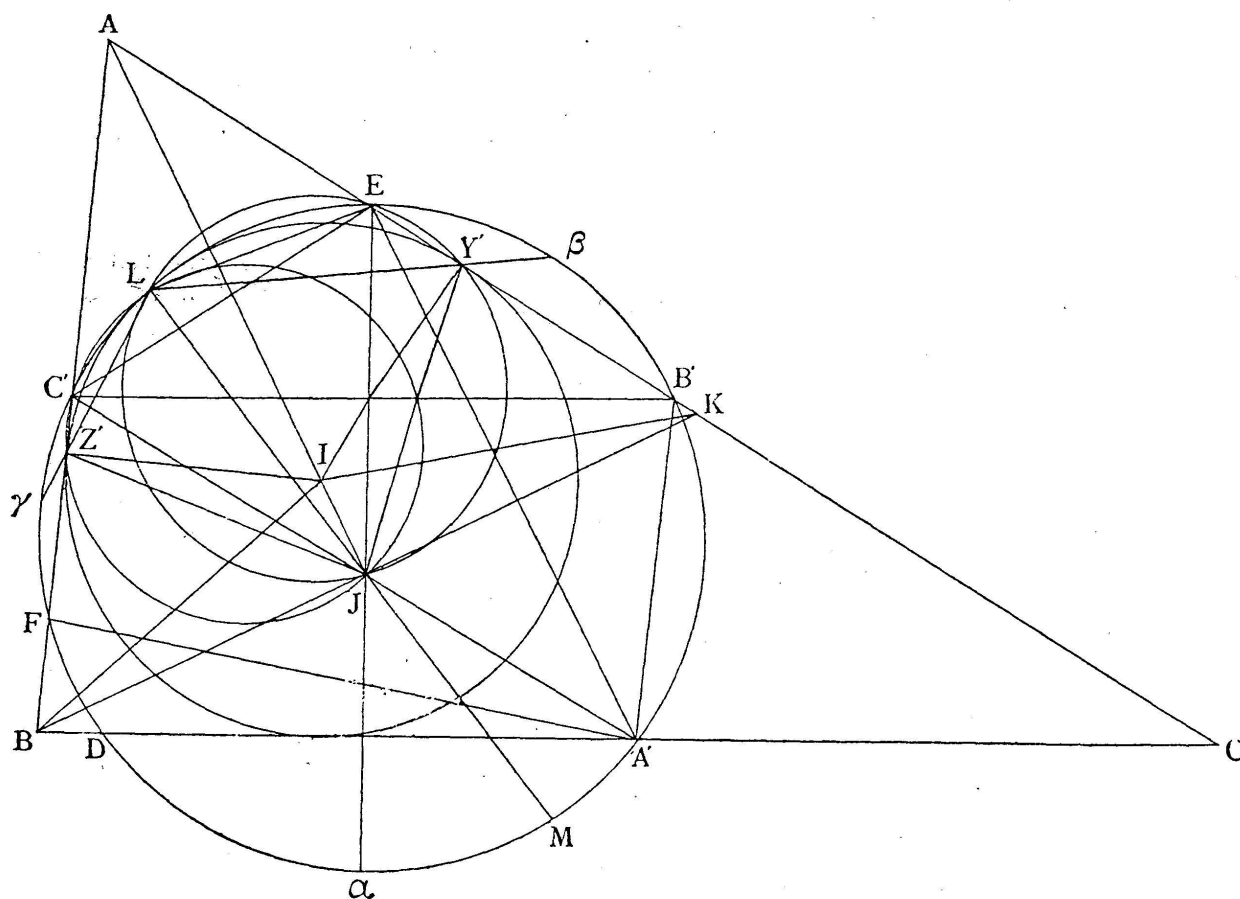


Fig. 2.

rencontre  $\alpha$  de  $EJ$  avec le cercle  $A'B'C'$  est le milieu de l'arc  $B'A'C'$ .

Supposons pour le moment que le cercle  $XYZ$  soit le cercle inscrit et que les grandeurs de trois angles du triangle soient dans l'ordre suivant :

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C} .$$

Soient  $M$  le milieu de l'arc  $EA'C'$  et  $L$  le second point de rencontre de  $MJ$  avec la circonférence  $A'B'C'$ .

Puisque

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C} ,$$

on a

$$\widehat{B} > \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{A}) > \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

et comme

$$\widehat{C'B'A'} = \widehat{B},$$

$$\widehat{C'LM} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{EB'C'}) = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C}) = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}),$$

$$\widehat{C'E\alpha} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C'A'B'}) = \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

on a :

$$\widehat{C'B'A'} > \widehat{C'LM} > \widehat{C'E\alpha}.$$

Donc le point M se trouve sur l'axe  $A'\alpha$  et par suite L se trouve sur l'arc  $C'E$ .

Soient  $\beta$  le milieu de l'arc conjugué de l'arc  $B'A'E$  et  $\gamma$  le milieu de l'arc conjugué de l'arc  $C'A'F$  et soient  $Y'$  et  $Z'$  les points de rencontre respectifs de  $L\beta$ ,  $L\gamma$  avec  $AC$ ,  $AB$ , on a :

$$\widehat{JLY'} = \widehat{JLE} - \widehat{\beta LE},$$

par suite l'angle  $JLY'$  est mesuré par

$$\frac{1}{2} \text{ arc } EA'C' - \frac{1}{2} \text{ arc } E\beta B' = \frac{1}{2} \text{ arc } B'A'C',$$

c'est-à-dire est égal à l'angle  $JEY'$ ; ce qui prouve que le quadrilatère  $JLEY'$  est inscriptible à un cercle.

De même, le quadrilatère  $JLC'Z'$  est inscriptible.

Donc

$$\widehat{JY'C} = \widehat{JLE}, \quad \widehat{JLC'} = \widehat{JZ'B},$$

les deux triangles  $AJY'$ ,  $AJZ'$  sont par suite égaux; d'où l'on a :

$$AY' = AZ'.$$

Si donc on décrivait un cercle ayant son centre I sur  $AJ$  et tangent en  $Y'$  à  $AC$ , ce cercle serait nécessairement tangent en  $Z'$  à  $AB$ .

Or, puisque la différence des angles inscrits qui interceptent les arcs  $\beta A'\gamma$  et  $\beta L\gamma$  est égal à la différence des angles qui interceptent les arcs  $FA'B'$  et  $C'LE$  c'est-à-dire à l'angle A et que la somme des premiers angles est égale à deux droits, on a :

$$\beta L\gamma = 1 \text{ droit} + \frac{A}{2};$$

ce qui montre que le cercle I passe par le point L.

Le point de contact  $Y'$  du cercle I avec la sécante  $EB'$  du cercle

$A'B'C'$ , le point de rencontre de ces deux cercles et le milieu  $\beta$  de l'arc  $EB'$  étant ainsi situés sur une même droite, ces deux cercles se touchent au point  $L$ .

Il nous reste à prouver que le cercle  $I$  est le cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

Or, chacun des angles  $IY'K$ ,  $IJK$  étant droit, le quadrilatère  $JY'K$  est inscriptible, on a donc :

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IJY'} = \widehat{EJY'} + \widehat{AJE} ;$$

mais les quatre points  $E, L, J, Y'$  étant sur une même circonférence, on a :

$$\widehat{EJY'} = \widehat{ELY'} = \widehat{EL\beta} = \frac{1}{2} \widehat{EC'B'}$$

et  $J$  étant le centre du cercle exinscrit au triangle  $AC'E$  :

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2} \widehat{AC'E} ,$$

donc

$$\widehat{IKY'} = \frac{1}{2} (\widehat{EC'B'} + \widehat{AC'E}) = \frac{1}{2} \widehat{AC'B'} = \frac{1}{2} \widehat{B} .$$

D'ailleurs,

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IBA} , \quad \text{donc} \quad \widehat{IBA} = \frac{1}{2} \widehat{B} ,$$

Le point  $I$  est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

On a pu ainsi démontrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Si, au lieu de supposer  $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$  comme je viens de faire, on suppose seulement  $\widehat{B} > \widehat{C}$  et qu'à la place de  $M, \beta, \gamma$ , on mette les points diamétralement opposés, on pourra démontrer d'une façon presque analogue que le cercle  $A'B'C'$  est tangent au cercle exinscrit dans l'angle  $A$ .

Le théorème est donc démontré.

*Corollaire.* — Le point  $J$  est le centre du cercle exinscrit au triangle  $AC'E$ .

#### 4<sup>e</sup> Démonstration.

IV. — Appelons  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ,  $H$  l'orthocentre de ce triangle,  $N$  le centre du cercle  $A'B'C'$  et  $I$  le centre du cercle  $XYZ$ . (Si le cercle  $XYZ$  est le cercle exins-

crit, ce cercle sera dans la suite celui qui est situé dans l'angle BAC à moins qu'on n'indique le contraire). (Fig. 3).

Soient  $\alpha$  le second point d'intersection de la droite AI avec le cercle ABC, P le second point d'intersection de la droite  $\alpha O$  avec le même cercle, D le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AC et E le point d'intersection de la droite A'D avec la droite AP.

Soient encore L le milieu de la droite AH et F, K, M les points où la droite menée par le point L perpendiculairement à la droite AI coupent respectivement les droites  $\alpha A$ ,  $\alpha P$ , A'E.

Les deux points D et A' étant situés sur la même circonférence de diamètre CP et les deux angles A'PC,  $\alpha AC$  dans le cercle O interceptant le même arc C $\alpha$ , on a :

$$\widehat{A'DC} = \widehat{A'PC} = \widehat{\alpha AC} .$$

Donc A'D est parallèle à  $\alpha A$  et est par suite perpendiculaire à LK.

Or, les deux quadrilatères A'LAO et LKPA sont des parallélogrammes (si l'angle A était droit, les deux droites A'L et LK coïn-

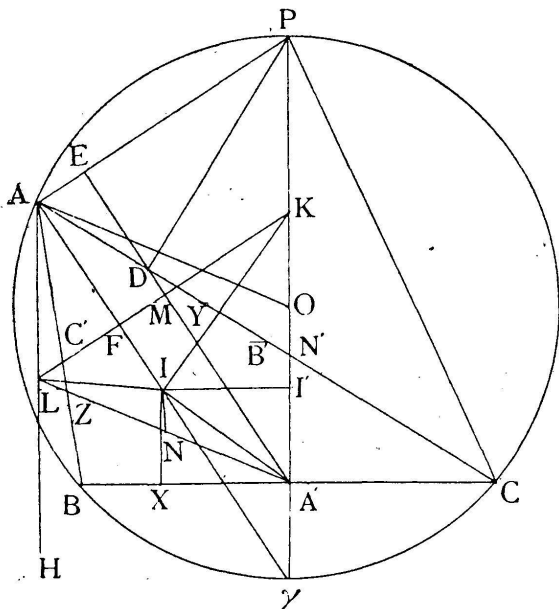


Fig. 3.

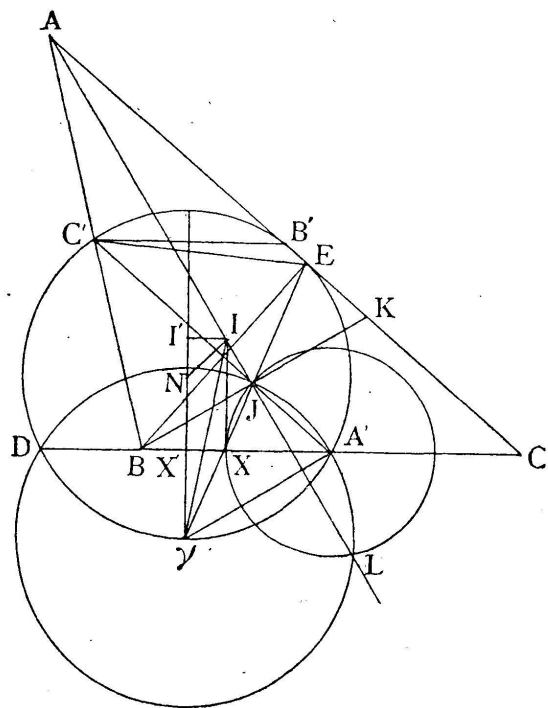


Fig. 4.

cideraient respectivement avec OA et AP), le triangle A'LK est donc un triangle isocèle, égal au triangle OAP; donc la base LK de ce triangle sera divisée en M en deux parties égales par la droite A'M.

En supposant maintenant  $\widehat{B} > \widehat{C}$ , on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \cdot FM = 2AP \cdot AE ;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \cdot AE = \overline{AD}^2 ,$$

et en appelant I' le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A'P et N' le milieu de A'K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = XA' = II' ,$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2 \cdot \overline{XA'}^2 = \overline{XA'}^2 + \overline{II'}^2 .$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{XA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{I'K}^2 ,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{XA'}^2 + \overline{IX}^2) = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 .$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{N'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA' ;

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2 \cdot \overline{IN}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2 \cdot \overline{IN}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 .$$

Donc

$$IN = I'N' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

### 5° Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs

côtés opposés, I le centre du cercle XYZ, J et K les points de rencontre respectifs avec les droites Al et AC de la droite menée de B perpendiculairement à Al, et enfin  $\alpha$  le second point de rencontre de la droite EJ avec le cercle A'B'C'. (Fig. 4.)

On voit sur la figure que les quatre points  $\alpha$ , A', E, C' sont sur la même circonférence, que le point J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BEK, que C'A' et AC sont parallèles et que J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC'E comme j'ai indiqué dans la 3<sup>e</sup> démonstration; et d'après ces quatre conditions on doit avoir :

$$\widehat{\alpha A' J} = \widehat{\alpha E C'} = \widehat{\alpha E K} = \widehat{J K E} = \widehat{B J C'} . \quad (1)$$

Donc  $\alpha A'$  est parallèle à BK et par suite perpendiculaire à Al. Le second point de rencontre des cercles dont les centres sont respectivement en  $\alpha$  et A' et qui se coupent d'abord en J est donc sur la droite Al; j'appelle L ce second point de rencontre.

Le parallélisme des droites C'A' et AC donne :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha E K} , \quad \text{mais} \quad \widehat{\alpha E K} = \widehat{\alpha A' J}$$

d'après (1), donc :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha A' J} , \quad \text{par suite} \quad \alpha A' = \alpha J .$$

D'ailleurs, comme le point  $\alpha$  est le milieu de l'arc B'A'C' et que B'C' et A'D sont parallèles, ce point  $\alpha$  est aussi le milieu de l'arc A'D.

Il s'en suit que le cercle dont le centre est en  $\alpha$  et ayant  $\alpha J$  pour rayon passe par les deux points A' et D.

Ensuite les deux longueurs A'X et A'J étant chacune égale à la demi-différence de AC et AB sont égales entre elles.

Donc, le point X est sur la circonférence de centre A' et de rayon A'J.

Or, dans le cercle JA'L, on a :

$$\overline{\alpha I}^2 - \overline{\alpha A'}^2 = IJ \cdot IL ,$$

mais IX étant tangent au cercle JX'L,

$$IJ \cdot IL = \overline{IX}^2 , \quad \text{donc} : \quad \overline{\alpha I}^2 = \overline{IX}^2 + \overline{\alpha A'}^2 . \quad (2)$$

Maintenant, en désignant par N le centre du cercle A'B'C', par I' le pied de la perpendiculaire abaissée du point I à la droite

$\alpha N$  et par  $X'$  le point de rencontre de  $\alpha N$  et de  $A'D$ , on a dans le triangle  $\alpha IN$

$$\begin{aligned} \overline{IN}^2 &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot (I'X' \pm \alpha X') \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot I'X' - 2 \cdot \alpha N \cdot \alpha X' \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot IX - \overline{\alpha A'}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{IN}^2 = \overline{\alpha N}^2 + \overline{IX}^2 \mp 2\alpha N \cdot IX = (\alpha N \mp IX)^2,$$

on a donc :

$$IN = \alpha N \mp IX,$$

ce qui montre que les deux cercles  $N, I$  se touchent.

*Corollaire.* —  $J$  est également distant des trois côtés du triangle  $A'ED$ .

### 6<sup>e</sup> Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5<sup>e</sup> démonstration, menons la droite passant par les points  $X$  et  $J$ . (Fig. 5.)

Puisque  $A'J$  et  $A'X$  sont égaux et que  $A'J$  et  $CY$  sont parallèles, les deux triangles  $A'XJ$  et  $CXY$  sont des triangles isocèles et équiangulaires; donc  $XY$  et  $XJ$  coïncident entre eux.

Menons la droite qui passe par deux points  $\alpha$  et  $X$  et qui rencontre de nouveau en  $L$  le cercle  $A'B'C'$ .

Les deux angles  $\alpha LA'$  et  $\alpha A'X$  étant égaux, le cercle qui passe par les trois points  $A', X, L$  touche la droite  $\alpha A'$  au point  $A'$ ; donc

$$\alpha X \cdot \alpha L = \overline{\alpha A'}^2.$$

Mais  $\alpha J = \alpha A'$  comme on a indiqué dans la 5<sup>e</sup> démonstration, donc :

$$\alpha X \cdot \alpha L = \overline{\alpha J}^2,$$

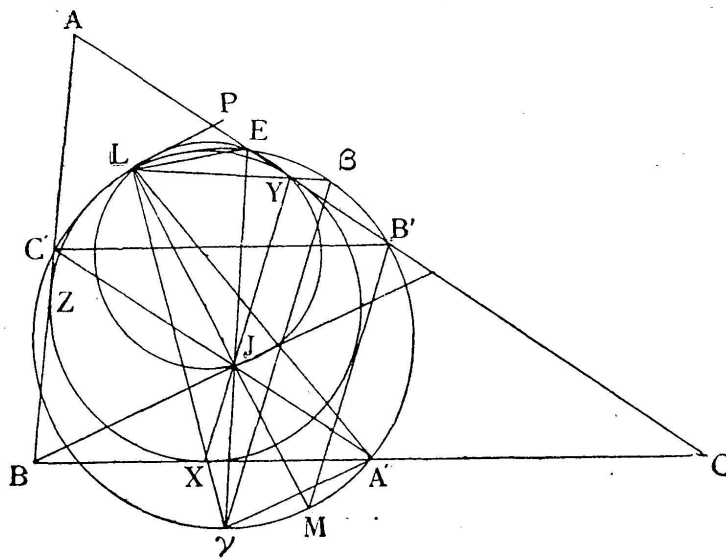


Fig. 5.



ce qui montre que la droite  $\alpha J$  touche le cercle passant par les trois points X, J, L et que par suite les deux angles  $\alpha LJ$ ,  $\alpha JX$  sont égaux.

Si maintenant on mène par le point  $B'$  deux droites respectivement parallèles aux deux droites XY et CB et coupant de nouveau le cercle  $A'B'C'$  en M et  $C'$ , la droite XY faisant des angles égaux avec deux droites BC et AC,  $B'M$  divise en deux parties égales un des angles que font entre elles deux droites  $B'C'$  et  $B'E$ ; donc l'arc  $C'M$  est la moitié de l'arc  $C'E$ . De plus, comme l'arc  $C'\alpha$  est la moitié de l'arc  $C'B'$ , l'arc  $\alpha M$  est égal à la moitié de l'arc  $B'E$  (si le cercle XYZ était le cercle inscrit, l'arc  $\alpha M$  aurait le même sens que l'arc  $B'E$  intercepté par l'angle inscrit  $B'C'E$ , et si le même cercle était exinscrit, l'arc  $M\alpha$  aurait le même sens que l'arc  $B'A'C'$ ).

Si donc on mène du point  $\alpha$  la droite parallèle à la droite XY, cette droite passera par le milieu  $\beta$  de l'arc  $B'E$ .

Les deux angles  $\alpha JX$  et  $EJY$  sont égaux ou supplémentaires suivant que le cercle XYZ était inscrit ou exinscrit.

Dans ce qui suit, je suppose, pour plus de commodité, que l'angle B soit plus grand que l'angle C si XYZ était le cercle inscrit et plus petit que C si ce cercle était exinscrit.

Or, l'angle  $J\alpha\beta$  est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant  $\frac{1}{2}$  arc  $B'E =$  arc  $\alpha M$  suivant que ce cercle XYZ est inscrit ou exinscrit; donc l'angle  $\alpha LJ$  est égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc  $\alpha M$  et par suite la droite LJ passe par le point M.

Donc :

$$2 \text{ droits} - \widehat{JLE} = \widehat{MBE} = \widehat{JYE}$$

et le quadrilatère EYJL est inscriptible.

Donc :

$$\widehat{ELY} = \widehat{EJY} = 2 \text{ droits} - \widehat{J\alpha\beta}.$$

Ce dernier angle  $J\alpha\beta$  est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant la moitié de l'arc  $B'E$ , suivant que le cercle XYZ est inscrit ou exinscrit; donc la droite LY passe par le point  $\beta$ .

Les deux arcs  $\alpha M$  et  $\beta E$  étant égaux, les deux arcs  $\alpha\beta$  et ME seront aussi égaux, d'où :

$$\widehat{XLY} = \widehat{JLE} = 2 \text{ droits} - \widehat{XYE},$$

donc le point L est situé sur le cercle XYZ.

Si ensuite on mène au point L la tangente au cercle  $A'B'C'$  et qu'on prenne sur cette tangente un point P de façon que les deux

points P et  $\alpha$  soient de part et d'autre de la droite  $L\beta$ , on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} ,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles  $A'B'C'$  et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7<sup>e</sup> Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5<sup>e</sup> démonstration pour désigner les différents points de la figure ; de plus j'appelle J' le point de rencontre des deux droites XY et  $\alpha B'$ . (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

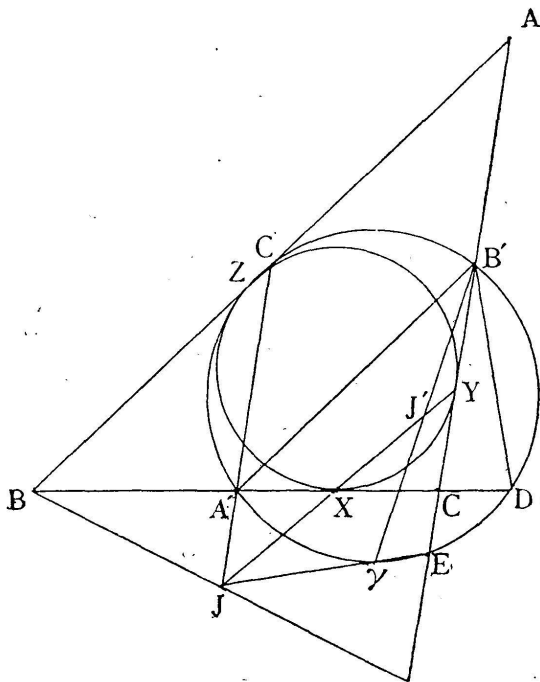


Fig. 6.

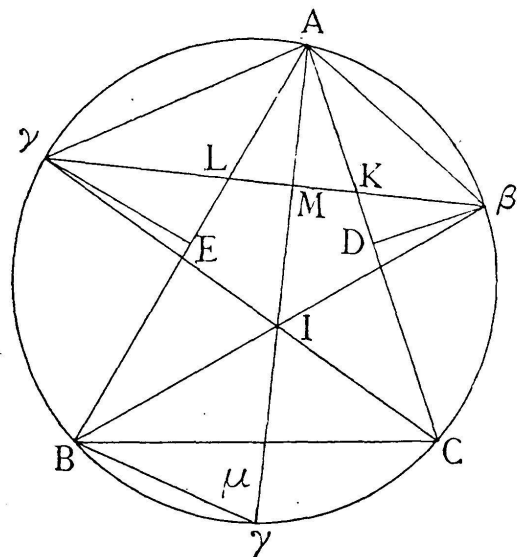


Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6<sup>e</sup> démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites  $\alpha E$  et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc  $B'A'E$  si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc  $B'A'E$  si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E

est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle A'B'C'; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites  $\alpha E$  et  $\alpha B'$  sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6<sup>e</sup> démonstration, on pourra prouver que les deux cercles A'B'C' et XYZ se touchent entre eux.

### 8<sup>e</sup> Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par  $a, b, c$  les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par  $r$  et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient  $\beta, \gamma$  les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de  $\beta$  sur AC et de  $\gamma$  sur AB; et K, L, M les points de rencontre de  $\beta\gamma$  avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites  $\beta A$  et  $\gamma A$  étant respectivement égales aux droites  $\beta I$  et  $\gamma I$ , la droite  $\beta\gamma$  est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales; donc les deux triangles  $\beta AM$  et  $A\gamma E$  sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles  $\beta DA$  et  $AM\gamma$  donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire <sup>1</sup> :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \quad \text{d'où} \quad \beta D \cdot \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \cdot \gamma E = \overline{AI}^2 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé SHIRAIISHI NAGATADA dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu*.

Maintenant soit  $\alpha$  le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement  $\mu, \mu', \mu''$  la distance de  $\alpha$  à la corde BC et les distances  $\beta D$  et  $\gamma E$ . D'après les résultats précédents :

$$\Sigma \overline{AI}^2 = 4 \Sigma \mu' \mu'' .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 &= (\Sigma \mu)^2 - \Sigma \mu^2 = (\Sigma \mu)^2 - \Sigma (\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4} a^2) \\ &= \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu)^2 - 2R \Sigma \mu = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu - R)^2 - R^2 . \end{aligned}$$

Mais, on a :

$$\Sigma \mu = 2R \mp r . \tag{2}$$

D'où

$$\frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc<sup>1</sup> :

$$\overline{AI}^2 = \frac{1}{2} \Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma \overline{AO}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 .$$

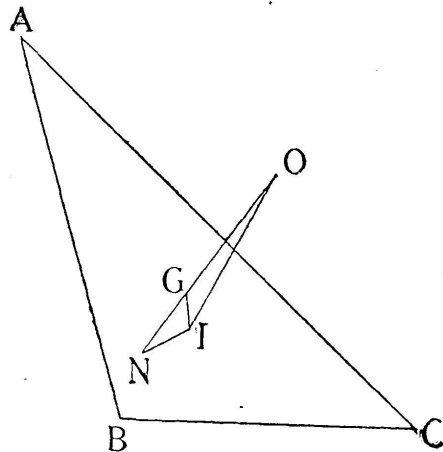


Fig. 8.

<sup>1</sup> Lorsque  $r$  représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7<sup>e</sup> édition, 1<sup>re</sup> partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de  $\Sigma AI^2$  l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{IG}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Donc :

$$2\overline{IN}^2 + R^2 \mp 2Rr = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où :  $\overline{IN}^2 = \left(\frac{1}{2}R \mp r\right)^2$ , par suite  $IN = \frac{1}{2}R \mp r$ .

Donc les deux cercles  $A'B'C'$  et  $XYZ$  se touchent, c. q. f. d.

*Corollaire.* — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4Rr = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma AI^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

### 9<sup>e</sup> Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

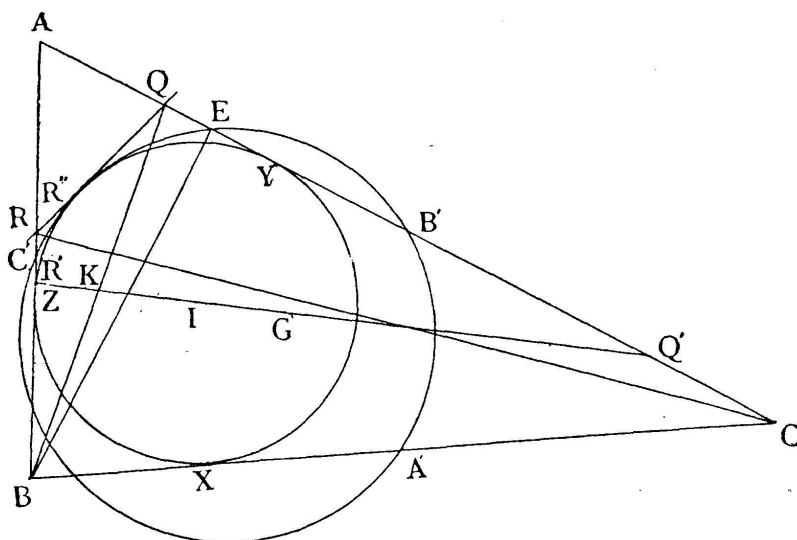


Fig. 9.

Représentons respectivement par  $a, b, c$  les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de

rencontre respectifs de l'axe radical des deux cercles ABC et XYZ avec AC et AB. (Fig. 9.)

On a alors d'après une propriété de l'axe radical :

$$QB' \cdot QE = \overline{QY}^2 \quad \text{ou} \quad QB' \cdot (QB' - EB') = (QB' - YB')^2,$$

d'où

$$QB' \cdot (2YB' - EB') = \overline{YB'}^2.$$

Par suite

$$\frac{QB'}{YB'} = \frac{YB'}{2YB' - EB'} \quad (1)$$

mais

$$YB' = \frac{1}{2}(\mp a c) \quad (2)$$

De plus :

$$2b \cdot EB' = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 2(\pm a + c) \cdot YB'$$

d'où

$$\frac{YB'}{EB'} = \frac{b}{\mp a + c}$$

donc :

$$\frac{YB'}{2YB' - EB'} = \frac{b}{\mp a + 2b - c} \quad (3)$$

Des relations (1), (2), (3), on tire :

$$\frac{QB'}{\frac{1}{2}(\mp a - c)} = \frac{\frac{1}{2}b \text{ ou } AB'}{\frac{1}{2}(\mp a + 2b - c)}$$

d'où

$$\frac{QB'}{AB'} = \frac{\pm a - c}{\mp a + 2b - c}$$

Donc :

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB' - QB'}{-(QB' + AB')} = \frac{\mp a - b}{b - c} \quad (4)$$

En échangeant les segments de la droite AC et les segments correspondants de la droite AB, on aura :

$$\frac{AR}{BR} = \frac{\mp a - c}{c - b} = \frac{c \mp a}{b - c} \quad (5)$$

Appelons maintenant Q' le conjugué isotomique du point Q par rapport au côté AC du triangle ABC et R' le conjugué isotomique du point R par rapport aux côtés AB du même triangle; soit K le

point où la droite  $Q'R'$  coupe la droite  $BQ$ ; on a d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{QQ'}{AQ'} \cdot \frac{AR'}{BR'} = 1$$

et comme

$$\frac{QQ'}{AQ'} = \frac{-CQ + CQ'}{-CQ} = \frac{CQ + AQ}{CQ}, \quad \frac{AR'}{BR'} = \frac{BR}{AR}.$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{\mp a - c}{b - c} \cdot \frac{b - c}{\mp a + c} = 1,$$

d'où :

$$\frac{BK}{QK} = -1.$$

Donc  $K$  est le milieu du segment  $BQ$ .

De même la droite  $Q'R'$  rencontre le segment  $CR$  en son milieu.

Si ensuite on affecte de signes les perpendiculaires abaissées des trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur la droite  $Q'R'$  et qu'on les représente par  $L$ ,  $M$  et  $N$ , on a en remarquant (4) et (5) :

$$\frac{L}{b - c} = \frac{M}{c \mp a} = \frac{N}{\pm a - b}.$$

Mais

$$\pm a \cdot (b - c) + b \cdot (c \mp a) + c \cdot (\pm a - b) = 0,$$

d'où

$$\pm a \cdot L + b \cdot M + c \cdot N = 0.$$

Donc la droite  $Q'R'$  passe par le centre moyen des sommets du triangle  $ABC$  pour multiples  $\pm a$ ,  $b$ ,  $c$ , c'est-à-dire par le centre  $I$  du cercle  $XYZ$ .

Donc, la droite  $QR$  est tangente au cercle  $XYZ$ , car si l'on suppose que  $QR$  ne soit pas tangente au cercle  $XYZ$  et que la tangente (autre que  $AC$ ) menée du point  $Q$  au cercle  $XYZ$  rencontre la droite  $AB$  en un point  $R''$ , les milieux des deux segments  $BQ$  et  $CR''$  et le point  $I$  seront, comme on sait, en ligne droite; de plus, puisque, comme on vient de le démontrer, le milieu du segment  $BQ$ , celui de  $CR$  et le point  $I$  sont aussi en ligne droite et que le milieu du segment  $BQ$  et le point  $I$  ne coïncident pas, ces deux points déterminent une droite et le point  $I$  sera situé sur la droite passant par le milieu des deux segments  $CR$  et  $CR''$ , c'est-à-dire sur  $A'B'$ , ce qui est évidemment contraire à la vérité.

*Corollaire I.* — P, Q, R étant les points où la tangente commune au cercle des neuf points A'B'C' d'un triangle ABC et au cercle inscrit ou exinscrit XYZ, coupe les trois côtés de ce triangle et P', Q', R' les conjugués isotomiques de P, Q, R par rapport à ces côtés, la droite qui passe par P', Q', R' passe aussi par les milieux des diagonales du quadrilatère complet que forment les trois côtés du triangle et la tangente commune précédente et par l'un des points de Nagel du triangle.

Démonstration : On a déjà démontré que la droite Q'R' passe par les milieux des segments BQ, CR et le centre I du cercle XYZ ; et puisque l'anti-complémentaire du point I est un des points de Nagel, il suffit de prouver ici que Q'R' passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Or, de

$$(b - c) + (c \mp a) + (\pm a - b) = 0 ,$$

on tire

$$L + M + N = 0 .$$

Donc la droite Q'R' passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour les multiples (chacun vaut 1), c'est-à-dire par le point G.

*Corollaire II.* — Les rapports des segments portés sur le côté AC du triangle ABC sont :

$$\frac{QC}{b - c} = \frac{Q'Q}{c \mp a} = \frac{QA}{\pm a - b} .$$

Y. SAWAYAMA (Tokio).

---

## CHRONIQUE

---

### Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Milan, au commencement d'octobre 1911. La date et le programme seront publiés dans un prochain numéro.

**Etats-Unis.** — La sous-commission américaine vient de publier le 3<sup>me</sup> fascicule de son *Bulletin*. Il est consacré à un rapport préparatoire concernant la préparation du corps enseignant des collèges et des universités : N<sup>o</sup> 3. *Provisional Report of the Sub-*