

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1911)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS  
ET GOMME ENVELOPPE  
**Autor:** Majcen, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13528>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

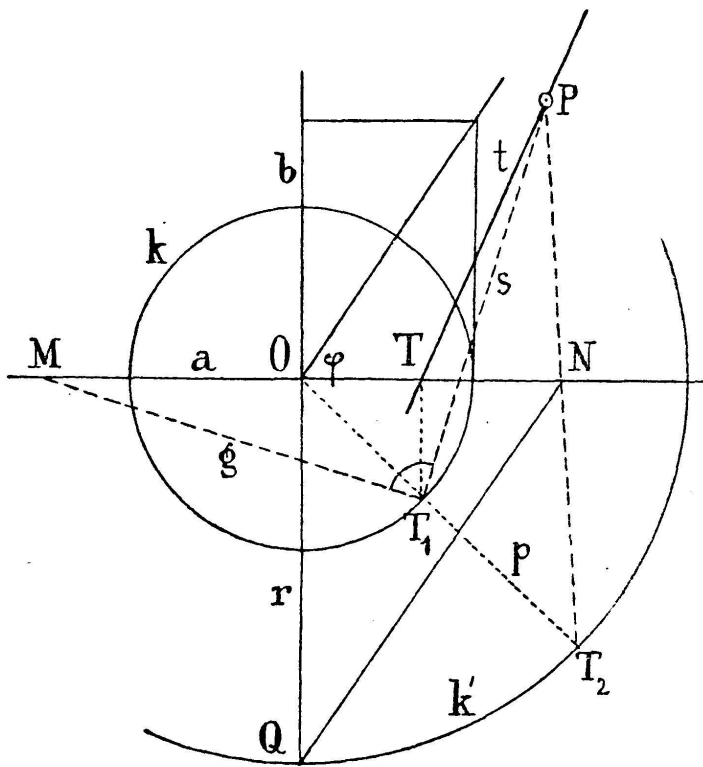
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## UNE CONSTRUCTION DE L'HYPÉRBOLE COMME LIEU DE POINTS ET COMME ENVELOPPE

Une considération de l'hyperboloïde de rotation à une nappe m'a fourni quelques relations qui peuvent être employées pour une construction simple de l'hyperbole (deux axes  $2a$  et  $2b$  étant donnés) et, en même temps, pour la construction des tangentes dans les points déterminés de la courbe.



axes  $2a$  et  $2b$  étant donnés) et, en même temps, pour la construction des tangentes dans les points déterminés de la courbe.

Comme les constructions connues de l'hyperbole et de ses tangentes ne sont pas nombreuses, je donne ici encore cette construction nouvelle en espérant qu'on pourra en faire usage dans l'enseignement.

Soit  $P$  un point de l'hyperbole, ayant  $x_1, y_1$  comme coordonnées; désignons par  $a$  et  $b$  les demi-axes de la courbe. La tangente en  $P$

$$(t) \quad b^2 x_1 x - a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$$

coupe l'axe  $a$  (qui est situé sur l'axe des  $x$ ) en un point  $T$ , ayant les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{x_1}, \quad y = 0.$$

La droite  $x = \frac{a^2}{x_1}$  (parallèle à l'axe des  $y$ ) coupe le cercle  $k$ , décrit du centre  $O$  avec  $a$  comme rayon, en deux points, dont l'un seulement ( $T_1$ ) sera pris en considération. Les coordonnées du point  $T_1$  seront, par rapport à l'équation

$$(k) \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

les suivantes :

$$x = \frac{a^2}{x_1}, \quad y = -\frac{a}{x_1} \sqrt{x_1^2 - a^2},$$

La droite de jonction  $PT_1$  aura l'équation :

$$(PT_1) \quad y + \frac{a}{x_1} \sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{x_1 y_1 + a \sqrt{x_1^2 - a^2}}{x_1^2 - a^2} \left( x - \frac{a^2}{x_1} \right).$$

Elevons en  $T_1$  la perpendiculaire ( $g$ ) à  $PT_1$ ; la droite  $g$  aura l'équation

$$y + \frac{a}{x_1} \sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1 y_1 + a \sqrt{x_1^2 - a^2}} \left( x - \frac{a^2}{x_1} \right).$$

En posant ici  $y = 0$ , nous obtiendrons l'abscisse du point (M) d'intersection de la droite  $g$  avec l'axe des  $x$ . On aura

$$a y_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} + \frac{a^2}{x_1} (x_1^2 - a^2) = (a^2 - x_1^2) x + (x_1^2 - a^2) \frac{a^2}{x_1},$$

alors, en posant ici

$$a y_1 = + b \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

(ce qui résulte de l'équation de l'hyperbole donnée), nous aurons la distance cherchée  $\overline{OM}$

$$x = \overline{OM} = -b.$$

Toutes les perpendiculaires  $g$  passent, par conséquent, par le point fixe (M).

Déterminons maintenant le point ( $T_2$ ) commun aux rayons  $OT_1$  et  $PN$ , où  $N$  est le point sur l'axe des  $x$ , ayant pour abscisse  $\overline{ON} = b$ .

Nous aurons

$$(OT_1) \quad y = - \frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} x ;$$

l'autre rayon PN, comme droite passant par les points avec les coordonnées  $(x_1, y_1)$ ,  $(b, 0)$ , aura l'équation

$$(PN) \quad y - y_1 = \frac{-y_1}{b - x_1} (x - x_1) .$$

En éliminant  $y$  entre les deux équations dernières, on obtient l'abscisse du point cherché  $T_2$  :

$$x' = \frac{aby_1}{(x_1 - b)\sqrt{x_1^2 - a^2} + ay_1} ,$$

et si l'on pose ici comme précédemment :

$$ay_1 = + b\sqrt{x_1^2 - a^2} ,$$

on aura

$$x' = \frac{b^2}{x_1} .$$

L'ordonnée  $y'$  du point  $T_2$  sera obtenue à l'aide de l'équation de la droite  $OT_1$  en y remplaçant  $x$  par sa valeur  $x'$  déterminée ci-dessus, or :

$$y' = - \frac{b^2}{ax_1} \sqrt{x_1^2 - a^2} .$$

La somme des carrés de  $x'$  et  $y'$  donne :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{b^4}{a^2} .$$

Le point  $T_2$  décrit alors un cercle  $k'$  dont le rayon est la grandeur  $\frac{b^2}{a}$ , c'est-à-dire une fonction des demi-axes seuls de l'hyperbole.

La longueur  $\frac{b^2}{a} = r$  peut être construite aisément, parce

qu'on a

$$\frac{r}{b} = \frac{b}{a} = \text{tang } \varphi ,$$

où  $\varphi$  désigne la moitié de l'angle asymptotique.

Si l'on tire par le point N la parallèle à une asymptote, le point (Q), commun à cette parallèle et à l'axe des  $y$ , sera un point de la circonférence du cercle  $k'$ .

Voici donc comment on procédera dans la détermination constructive d'un point P de l'hyperbole, donnée par ses axes. On porte sur l'axe réel les segments  $OM = ON = b$ , et on décrit les deux cercles  $k$  et  $k'$  restant fixes pendant toute la construction. En faisant passer une droite quelconque ( $p$ ) par le centre O, on obtient les points  $T_1$  et  $T_2$  comme intersections respectives avec les circonférences  $k$  et  $k'$ . Si l'on tire les droites de jonction  $T_1M$  et  $T_2N$  et si l'on élève à la première une perpendiculaire ( $s$ ) au point  $T_1$ , les deux droites  $T_2N$  et  $s$  donnent en leur point commun P un point de l'hyperbole. Le pied T de la perpendiculaire, abaissée du point  $T_1$  sur l'axe réel, joint au point P donne la tangente  $t$  de la courbe au point P.

La droite  $T_2N$  étant une fois tirée, on déterminera aussi le deuxième point d'intersection  $T_2'$  avec la circonférence  $k'$ , et on obtiendra par le même procédé tout de suite encore un autre point de l'hyperbole.

Une tangente  $t$  de l'hyperbole étant donnée, on détermine le point de contact P de la manière suivante. On élève une perpendiculaire sur l'axe réel par le point d'intersection de cet axe avec la tangente  $t$ . La perpendiculaire coupe le cercle  $k$  au point  $T_1$ . Si l'on joint ce point  $T_1$  au point M et si l'on élève une perpendiculaire ( $s$ ) sur  $T_1M$  au point  $T_1$ , cette perpendiculaire coupe la tangente au point de contact cherché P.

On ne peut pas employer cette construction si l'on donne  $a = b$ ; la construction sera d'autant plus précise que la différence  $\pm (a - b)$  est plus grande (pour les deux cas, où l'on donne  $a > b$  ou  $a < b$ ).

Georges MAJGEN (Agram).