LE PROBLÈME DE TRANSON EN GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

Autor(en): **Turrière, É.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13530

LE PROBLÈME DE TRANSON EN GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

Étant sur le point de faire paraître mes recherches personnelles sur le *Problème de Transon*, ainsi que je l'ai annoncé dans diverses Notes publiées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1910, j'ai pensé qu'une exposition de l'histoire de ce problème important pourrait offrir un certain intérêt pour les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. Je vais donc résumer ici les recherches de TRANSON, de M. DARBOUX et de LIE.

Le développement des études de géométrie réglée, en ce qui concerne les complexes, est certainement en retard par rapport à la théorie des congruences de droites, notamment du point de vue des propriétés métriques : la théorie des congruences, en effet, a donné lieu à de nombreuses recherches se rapportant surtout à la géométrie projective. « Les « propriétés infinitésimales des congruences, écrit M. G. « KŒNIGS [1], sont connues depuis beaucoup plus longtemps « que celles des complexes. Elles se sont présentées aux « géomètres dès les premières recherches sur la théorie des « surfaces. Dans son *Traité de géométrie,* M. DARBOUX leur a « consacré une place importante et a ajouté à l'intérêt que « les géomètres leur prêtaient déjà en les rattachant aux « recherches de LAPLACE sur les équations linéaires aux « dérivées partielles du second ordre. »

Parmi les quelques recherches qui sont relatives aux propriétés infinitésimales des complexes, se trouve l'étude du problème considéré, pour la première fois en 1861, par ABEL TRANSON et qui peut être énoncé ainsi : « *Un complexe étant donné, déterminer toutes les congruences de droites qui appartiennent à ce complexe et qui sont des congruences de*

[1] G. KŒNIGS, *La géométrie réglée et ses applications,* ch. IV, § 66, (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI, 1892, p. 65).

normales ». Outre le grand intérêt géométrique que présente cette question, elle offre aussi un intérêt physique, puisqu'elle est équivalente à la détermination des systèmes de rayons lumineux jouissant d'une propriété donnée. Au même problème de Transon, LIE[1] rattache d'ailleurs le problème qui consiste à déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les tangentes à une famille à un paramètre de géodésiques appartiennent à un complexe de droites donné.

Dans son *Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace, suivant une loi continue*[2], TRANSON attache à tout point M (x, y, z) de l'espace une droite D dont les cosinus directeurs X, Y, Z sont trois fonctions données des coordonnées de M. Si l'équation

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$$

est intégrable, on sait que la totalité des droites données se répartit en groupes respectivement normaux aux différentes surfaces particulières que renferme son intégrale générale. Mais la répartition des droites en de tels groupes n'est nullement subordonnée à l'intégration de cette équation : quelles que soient les fonctions données, il y a toujours une infinité de manières de répartir l'ensemble donné, lorsque c'est un complexe, en groupes normaux à des surfaces distinctes et dans le cas même où l'équation ci-dessus est intégrable, la répartition qu'elle procure n'est qu'un mode particulier entre une infinité d'autres. Toute surface (S) — que TRANSON appelle *résolvante* — intégrale de l'équation linéaire

$$\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\right)p + \left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\right)q = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x},$$

est un lieu de *points de départ* M de rayons D d'une certaine congruence de normales. Il en résulte qu'à toute intégrale de cette dernière équation correspond une congruence de normales appartenant au complexe et réciproquement.

---

[1] SOPHUS LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differientialgleichungen* (*Math. Ann.*, V, 1872, § 52).

[2] *Comptes rendus*, 1861, LII, p. 245-247. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1861, XXII, 38e cahier, p. 195-208.

Tel est le résumé du Mémoire remarquable de TRANSON, Mémoire qui fut l'objet d'un rapport de CHASLES [1].

L'équation linéaire de TRANSON est d'une forme digne d'intérêt : je ferai remarquer que c'est l'équation des surfaces de tourbillon dans le champ de vecteurs (X, Y, Z) ; et j'ai pu obtenir cette équation en appliquant le théorème d'AMPÈRE-STOKES. Les caractéristiques sont les lignes de tourbillon et, dans le cas du complexe tétraédral convenablement défini, j'ai obtenu leurs équations sous la forme des trois équations d'EULER pour le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et qui n'est soumis à aucune force. L'intérêt de la méthode de TRANSON est donc grand, d'autant plus que j'ai pu obtenir une équation plus générale pour des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques.

Mais, à côté de certains avantages, se trouvent de très grands inconvénients, provenant principalement du choix des points de départ des droites du complexe lorsque celui-ci est défini, non plus analytiquement, mais géométriquement. J'ai bien pu obtenir des règles permettant de choisir des points de départ, dans divers cas particuliers, mais lorsqu'on se trouve en présence d'un complexe tel que le complexe de PAINVIN, on est d'abord embarrassé : il ne s'agit pas, en effet, de choisir des points de départ quelconques, mais ce qu'il ne faut pas perdre de vue c'est l'équation finale qui doit être simultanément simple et élégante. La méthode de TRANSON échoue totalement dans le cas du complexe de PAINVIN, alors, que par une autre méthode, j'ai pu obtenir une équation, non plus linéaire, il est vrai, mais possédant une intégrale quadratique ; le problème est alors équivalent à la détermination des géodésiques pour un certain élément linéaire de surfaces harmoniques.

La définition d'un complexe à l'aide des points de départ présente aussi l'inconvénient de ne pas toujours fournir un complexe, mais parfois une congruence de droites : si l'on se donne, par exemple, une quadrique et si à chaque point de l'espace, on attache les focales du cône circonscrit à la

[1] *Comptes rendus*, 1861, LII, p. 1013-1018.

quadrique, on constitue une congruence isotrope remarquable.

Dans le cas où la méthode de Transon est praticable, on obtient, non pas les surfaces dont les normales appartiennent au complexe, mais les surfaces résolvantes qui, malgré l'interprétation géométrique donnée par Ossian Bonnet [1], ont des rapports plutôt lointains avec le complexe. Il est d'ailleurs bien naturel qu'il en soit ainsi et que les surfaces résolvantes ne soient pas intimement liées au complexe, puisque les surfaces dépendent du choix des points de départ, lequel choix est arbitraire, dans le cas d'un complexe défini géométriquement.

Il convenait donc de reprendre le problème sous un autre jour et d'avoir principalement en vue la détermination des surfaces dont les normales appartiennent au complexe. Ces surfaces, pour abréger, je les désignerai sous le nom de *surfaces trajectoires*. Le premier, en 1870, M. Darboux [2] énonça incidemment le théorème suivant : *Étant donné un complexe de droites dont on connaît* a priori *une famille à un paramètre de surfaces trajectoires, non parallèles, la solution complète du problème de Transon pour le complexe considéré s'obtient sans introduction de nouvelles quadratures*. Des conséquences de ce théorème fondamental ont été développées par M. Darboux lui-même dans deux Communications récentes à l'Académie [3] « *Sur les congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe* », qui, comme l'indique le titre, contiennent des résultats plus généraux et relatifs aux congruences de courbes quelconques.

L'importance du théorème de M. Darboux n'a point échappé à Sophus Lie [4] qui rattacha l'étude du problème de Transon à ses recherches sur les transformations de contact. Sous la dénomination de *problème des normales*, Lie [5] considéra le problème de Transon et établit que l'équation aux dérivées

---

[1] *Comptes rendus*, LII, p. 1082.

[2] G. Darboux, « *Sur les systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* » (Bulletin des Sciences mathématiques, 1870, p. 351).

[3] Séances des 15 et 22 novembre 1909.

[4] Lie et Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 273 et p. 675-685.

[5] Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe*, (M. A. 1872).

partielles du premier ordre dont dépendent les surfaces trajectoires est caractérisée par son invariance dans la transformation infinitésimale constituée par la dilatation. Je ferai remarquer que cela revient à dire que l'équation du problème de TRANSON, pour un complexe quelconque, est l'équation du premier ordre la plus générale qui possède une intégrale développable isotrope.

Tel est le résumé des recherches qui furent faites sur le problème de TRANSON, pour un complexe quelconque. Il convient d'observer qu'en ce qui concerne des complexes particuliers on connaît, indépendamment de toute théorie générale, des surfaces dont les normales appartiennent à ces complexes : c'est ainsi que MONGE [1] avait déterminé, bien antérieurement à TRANSON, les surfaces dont les normales appartiennent au complexe spécial des tangentes à une surface développable, ou à une sphère. Plus généralement pour un complexe spécial quelconque, le problème, qui est équivalent à la détermination des lignes géodésiques de la surface de singularité, peut être considéré comme ayant été résolu par GEISENHEIMER, dans son Mémoire *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface* [2], et par tous les géomètres qui se sont occupés du problème des géodésiques.

Dans le cas du complexe linéaire, le problème fut résolu par LIE et par M. É. PICARD qui, dans sa Thèse de Doctorat (1877, p. 31), établit d'une manière purement géométrique que les surfaces trajectoires sont des hélicoïdes.

Après ce résumé succinct de l'historique du problème de TRANSON, je ne crois pas devoir abuser en résumant ici des recherches que les lecteurs pourront lire dans un Mémoire plus complet. Ils trouveront d'ailleurs des exemples de problèmes de TRANSON, résolus en appliquant le théorème de M. DARBOUX, dans les Notes parues dans les *Nouvelles Annales* de 1910 auxquelles je faisais allusion au début de cet article.

É. TURRIÈRE (Alençon).

---

[1] *Application de l'analyse à la géométrie*, p. 246-321.
[2] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1872.