

SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES

Autor(en): **Turrière, É.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-13531>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES

L'objet de cette Note est de mettre en évidence une interprétation géométrique, ressortissant à la Géométrie réglée, des relations qui caractérisent les fonctions synectiques.

Étant donné un système d'axes rectangulaires $O(x, y, z)$, de chaque point m de coordonnées x, y , dans le plan Oxy , est supposée partir une droite d de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = P \cos \theta + Q \sin \theta ,$$

$$p_2 = P \sin \theta - Q \cos \theta ,$$

$$p_3 = \sqrt{1 - P^2 - Q^2} ;$$

P et Q , dans ces formules, sont deux fonctions, quelconques pour l'instant, des variables x et y ; quant à θ , c'est un paramètre constant et quelconque.

Les droites d ainsi définies constituent, pour des fonctions P et Q données et pour chaque valeur du paramètre θ , une congruence de droites; lorsque θ varie, la congruence précédente se déforme en engendrant un complexe de droites; ce complexe peut être défini indépendamment de la considération des congruences : il est constitué par les génératrices de cônes de révolution de sommets situés dans une région du plan Oxy , d'axes parallèles à Oz , et dont les demi-angles V aux sommets sont déterminés par la formule

$$\sin^2 V = P^2 + Q^2 .$$

Le paramètre θ ayant une valeur fixée, la congruence qui lui correspond n'est pas une congruence de normales, dans le cas général où les fonctions P et Q sont quelconques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'expression

$$p_1 dx + p_2 dy$$

soit une différentielle exacte, ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \sin \theta = 0 .$$

Cette dernière relation est identiquement vérifiée quel que soit θ , lorsque P et Q sont liées par les conditions simultanées.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

et dans ce cas seulement. Il en résulte donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des droites d soit une congruence de normales, pour toutes valeurs du paramètre θ , est que P et Q soient deux fonctions synectiques*. En d'autres termes, $P + iQ$ doit être fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Telle est la propriété qui constitue une interprétation géométrique des relations qui lient les fonctions synectiques. Je terminerai cette Note par une propriété du complexe des droites d .

Soit

$$P + iQ = f(z) ;$$

le complexe peut être envisagé comme défini par les génératrices du cône de révolution, de sommets situés dans Oxy , d'axes parallèles à Oz , de demi-angles aux sommets déterminés par la formule

$$\sin V = |f(z)| ;$$

le point m est assujéti à l'unique condition d'appartenir à la région du plan Oxy pour laquelle le module de la fonction $f(z)$ est inférieur à l'unité. D'après ce qui précède, le complexe est engendré par une congruence de normales variable qui dépend d'un paramètre ; d'un théorème de M. DARBOUX, il résulte donc que toutes les congruences de

normales qui appartiennent à ce complexe, sont déterminables immédiatement, sans introduction de quadratures autres que celles qui pourraient figurer dans l'équation des surfaces trajectoires orthogonales des droites de la congruence associée au paramètre θ .

Quant à ces dernières surfaces, il est aisé de les déterminer. Soit M le point d'incidence de la normale d sur une des surfaces trajectoires, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point M ; en introduisant la distance $\overline{mM} = \lambda$ inconnue et à déterminer, on a

$$X = x + \lambda p_1, \quad Y = y + \lambda p_2, \quad Z = \lambda p_3;$$

en utilisant la relation

$$p_1 dX + p_2 dY + p_3 dZ = 0,$$

il vient :

$$-d\lambda = (Pdx - Qdy) \cos \theta + (Qdx + Pdy) \sin \theta;$$

de cette relation résulte l'expression de λ

$$2\lambda = - \left\{ e^{-i\theta} \int f(z) dz + e^{i\theta} \int f(z_0) dz_0 \right\} + \text{const},$$

dans laquelle z_0 désigne la variable complexe conjuguée de z ; la distance λ est donc définie par la formule

$$\lambda = - \text{partie réelle de } [e^{-i\theta} \varphi(z)] + \text{const},$$

en introduisant la nouvelle fonction de variable complexe

$$\varphi(z) = e^{-i\theta} \int f(z) dz,$$

afin de faire disparaître tout signe d'intégration dans les formules finales.

É. TURRIÈRE (Alençon).