4e Démonstration.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

A'B'C', le point de rencontre de ces deux cercles et le milieu β de l'arc EB' étant ainsi situés sur une même droite, ces deux cercles se touchent au point L.

Il nous reste à prouver que le cercle I est le cercle inscrit au triangle ABC.

Or, chacun des angles IY'K, IJK étant droit, le quadrilatère JIY'K est inscriptible, on a donc :

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IJY'} = \widehat{EJY'} + \widehat{AJE} ;$$

mais les quatre points E, L, J, Y' étant sur une même circonférence, on a :

$$\widehat{EJY'} = \widehat{ELY'} = \widehat{EL\beta} = \frac{1}{2}\, \widehat{EC'B'}$$

et J étant le centre du cercle exinscrit au triangle AC'E :

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2}\, \widehat{AC'E} ,$$

donc

$$\widehat{IKY'} = \frac{1}{2}\, (\widehat{EC'B'} + \widehat{AC'E}) = \frac{1}{2}\, \widehat{AC'B'} = \frac{1}{2}\, \widehat{B} .$$

D'ailleurs,

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IBA} , \qquad \text{donc} \qquad \widehat{IBA} = \frac{1}{2}\, \widehat{B} ,$$

Le point I est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

On a pu ainsi démontrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Si, au lieu de supposer $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ comme je viens de faire, on suppose seulement $\widehat{B} > \widehat{C}$ et qu'à la place de M, β, γ, on mette les points diamétralement opposés, on pourra démontrer d'une façon presque analogue que le cercle A' B' C' est tangent au cercle exinscrit dans l'angle A.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC'E.

4e Démonstration.

IV. — Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre de ce triangle, N le centre du cercle A'B'C' et I le centre du cercle XYZ. (Si le cercle XYZ est le cercle exinscrit, ce cercle sera dans la suite celui qui est situé dans l'angle BAC à moins qu'on n'indique le contraire). (Fig. 3).

Soient α le second point d'intersection de la droite AI avec le cercle ABC, P le second point d'intersection de la droite αO avec le même cercle, D le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AC et E le point d'intersection de la droite A'D avec la droite AP.

Soient encore L le milieu de la droite AH et F, K, M les points où la droite menée par le point L perpendiculairement à la droite AI coupent respectivement les droites αA, αP, A'E.

Les deux points D et A' étant situés sur la même circonférence de diamètre CP et les deux angles A'PC, αAC dans le cercle O interceptant le même arc Cα, on a :

$$\widehat{A'DC} = \widehat{A'PC} = \widehat{\alpha AC} .$$

Donc A'D est parallèle à αA et est par suite perpendiculaire à LK.

Or, les deux quadrilatères A'LAO et LKPA sont des parallélogrammes (si l'angle A était droit, les deux droites A'L et LK coïncideraient respectivement avec OA et AP), le triangle A'LK est donc un triangle isoscèle, égal au triangle OAP; donc la base LK de ce triangle sera divisée en M en deux parties égales par la droite A'M.

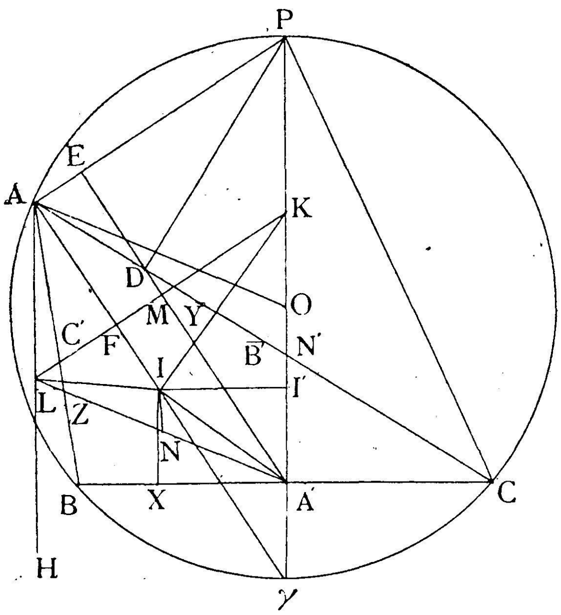

Fig. 3.

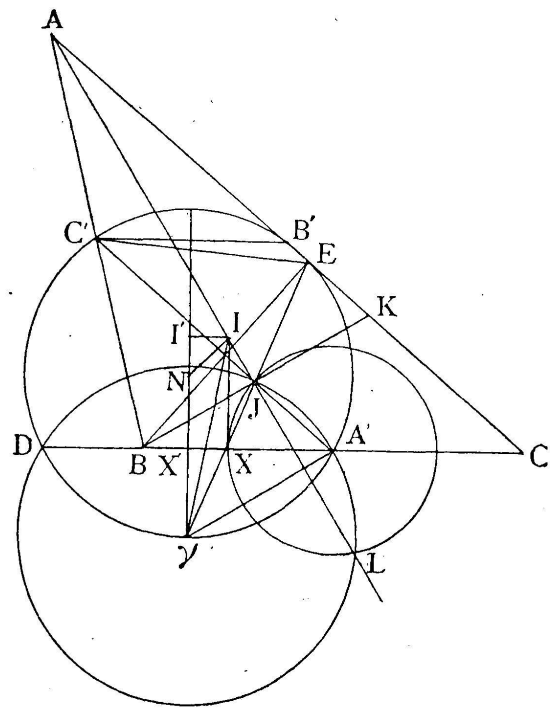

Fig. 4.

En supposant maintenant $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \cdot FM = 2\,AP \cdot AE \;;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \cdot AE = \overline{AD}^2 ,$$

et en appelant I′ le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A′P et N′ le milieu de A′K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = XA' = II' ,$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2 \cdot \overline{XA'}^2 = \overline{XA'}^2 + \overline{II'}^2 .$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{XA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{I'K}^2 ,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{XA'}^2 + \overline{IX}^2) = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{N'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA′ ;

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2 \cdot \overline{IN}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2 \cdot \overline{IN}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 .$$

Donc

$$IN = I'N' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

5e Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs