Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS
Autor: Barbette, Edouard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13533

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS

Dans notre ouvrage intitulé : *Les sommes de* p^tèmes *puissances distinctes égales à une* p^ième *puissance*[1], nous avons démontré que, quel que soit le nombre N, les équations

$$N = \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} ,$$

$$8N = x^2 - y^2 ,$$

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2} ,$$

$$8Nz + 1 = y^2 ,$$

sont possibles en nombres entiers; nous en avons déduit des méthodes nouvelles de décomposition des nombres en facteurs. Ce sont ces méthodes que nous allons examiner et simplifier par l'emploi des résidus triangulaires ou quadratiques.

1re méthode. — Considérons l'égalité

$$N + \frac{y(y+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{2} \qquad (1)$$

et cherchons quel nombre triangulaire, nous devons ajouter à N, pour obtenir un autre triangulaire; lorsque N est premier, les seules valeurs de x et y satisfaisant à l'équation sont

$$x = \frac{N+1}{2} , \qquad y = \frac{N-3}{2} ;$$

et

$$x = N , \qquad y = N - 1 .$$

[1] Voir l'analyse dans l'*Ens. math.* du 15 mai 1911. *(Réd.)*

Si N est composé, une décomposition de N en un produit de deux facteurs est donnée par l'égalité

$$N = \frac{(x-y)(x+y+1)}{2}.$$

Nous admettons N impair et débarrassé des facteurs 5, par suite terminé par 1, 3, 7 ou 9; le chiffre des unités des nombres triangulaires étant 0, 1, 3, 5, 6 ou 8, il s'ensuit que :

si N est terminé par 1, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 0 et 5 et leurs rangs y sont $\dot{1}0+4$, $\dot{1}0+5$, $\dot{1}0+9$ et $\dot{1}0$;

si N est terminé par 3, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 0, 3, 5 et 8 et leurs rangs y sont $\dot{1}0+2$, $\dot{1}0+4$, $\dot{1}0+5$, $\dot{1}0+7$, $\dot{1}0+9$ et $\dot{1}0$;

si N est terminé par 7, les triangles $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 1, 3, 6 ou 8 et leurs rangs y sont $\dot{1}0+1$, $\dot{1}0+2$, $\dot{1}0+3$, $\dot{1}0+6$, $\dot{1}0+7$ et $\dot{1}0+8$;

si N est terminé par 9, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 1 et 6 et leurs rangs y sont $\dot{1}0+1$, $\dot{1}0+3$, $\dot{1}0+6$ et $\dot{1}0+8$.

Soient maintenant, *pour le module* δ,

$$N \equiv \rho \qquad \text{et} \qquad \frac{x(x+1)}{2} \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_n ;$$

de l'égalité (1), nous déduisons

$$\rho + \frac{y(y+1)}{2} \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_n$$

et nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho, \rho_3 - \rho, \cdots, \rho_n - \rho$$

ou

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$$

en posant $\rho_i - \rho = r_i$; mais des résidus r_i ainsi obtenus, nous ne pourrons conserver que ceux qui font partie de la suite ρ_i puisque $\frac{y(y+1)}{2}$ est un triangulaire ; la suite des nombres triangulaires à ajouter à N se trouvera donc considérablement réduite et cette suite se réduira pour chaque nouveau diviseur δ employé.

Limite des opérations. Puisque

$$2N = (x - y)(x + y + 1) ,$$

le facteur $(x - y)$ est le plus petit diviseur de 2N ; si nous ne trouvons pas de solution y inférieure à une certaine limite a, nous en conclurons

$$y > a ,$$

par suite

$$\frac{x(x+1)}{2} > N + \frac{a(a+1)}{2} \qquad \text{d'où} \qquad x > \frac{-1 + \sqrt{8N + (2a+1)^2}}{2}$$

et

$$x + y + 1 > \frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} + (2a+1)}{2} .$$

Mais $x - y = \frac{2N}{x + y + 1}$; donc

$$x - y < \frac{4N}{\sqrt{8N + (2a+1)^2} + (2a+1)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{2} .$$

Si $2s + 1$ et $2\sigma + 1$ sont deux diviseurs de N dont le produit égale N lui-même, à ces diviseurs correspondent les deux solutions données par les systèmes d'équations

1er système : $x - y = 2s + 1$; $x + y + 1 = 2(2\sigma + 1)$.

2e système : $x - y = 2(2s + 1)$; $x + y + 1 = 2\sigma + 1$.

Par conséquent, si $\lambda < 2N < (\lambda + 1)^2$, les diviseurs que les essais ont éliminés sont ceux compris entre λ et $\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{2}$ ainsi que ceux compris entre $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{4}$.

Mais si les diviseurs que nous cherchons sont les diviseurs moindres que $\sqrt{N}$, la limite inférieure de a sera la partie entière de la valeur de α satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + (2\alpha + 1)^2} - (2\alpha + 1)}{2} = \sqrt{N} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{N} - 1}{2} ; \qquad (2)$$

si nous prenons, comme première limite supérieure, la partie entière par excès de la valeur de a satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + (2a + 1)^2} - (2a + 1)}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{8N - (\lambda^2 + 2\lambda)}{4\lambda} , \qquad (3)$$

les diviseurs éliminés seront ceux compris entre $\sqrt{N}$ et $\frac{\sqrt{8N + (2a + 1)^2} - (2a + 1)}{4}$. En d'autres termes, p étant le plus grand nombre premier contenu dans cette dernière limite, il restera à essayer tous les diviseurs premiers non supérieurs à p, hormis les diviseurs des modules employés ; et si le nombre N n'est divisible par aucun d'eux, nous en conclurons que N est un nombre premier.

Les divisions les plus rapides sont évidemment celles par 9 et par 11 ; aussi ce sont là les premiers diviseurs à employer. En procédant par limites successives, à partir de $\alpha = \frac{\sqrt{N} - 1}{2}$, on arrivera à décomposer avec facilité tout nombre, si grand soit-il !

Exemple. Soit à décomposer le nombre 40199 ; résolvons l'équation

$$40199 + \frac{y(y + 1)}{2} = \frac{x(x + 1)}{2} . \qquad (4)$$

Observons, avant tout, que 40199 n'est divisible par aucun des nombres 3, 7, 11 et 13 que nous allons employer comme modules ; de plus, 40199 étant terminé par 9, les triangulaires à ajouter occupent les rangs $\dot{10} + 1$, $\dot{10} + 3$, $\dot{10} + 6$ et $\dot{10} + 8$.

Puisque $200^2 < 40199 < 201^2$ et $283^2 < 2 \times 40199 < 284^2$, les relations (2) et (3) donnent pour limite inférieure $\alpha = 99$

et pour première limite supérieure $a = 213$; considérons donc les nombres

101	103	106	108
111	113	116	118
121	123	126	128
131	133	136	138
141	143	146	148
151	153	156	158
161	163	166	168
171	173	176	178
181	183	186	188
191	193	196	198
201	203	206	208
211	213		

Si du 101e triangulaire au 213e, nous n'obtenons pas de solution, les diviseurs restant à essayer seront moindres que

$$\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{4} = \frac{\sqrt{321592 + 182329} - 427}{4} = 70, \ldots,$$

donc non supérieurs à 67.

L'égalité (4) donne successivement :

Pour le module 9,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 3, 6$$

d'où nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 4, 5, 7, 1 ;$$

mais 4, 5 et 7 sont des non-résidus triangulaires pour le module 9, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1 \pmod 9$$

d'où

$$y = \dot{3} + 1 .$$

Pour le module 11,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 10$$

d'où il faudrait

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 6, 7, 9, 10, 1, 5 ;$$

mais 7, 9 et 5 sont des non-résidus triangulaires pour le module 11, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1, 6, 10 \pmod{11}$$

d'où

$$y = \dot{11} + 1, 3, 4, 6, 7, 9 .$$

Pour le module 7,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 3, 6$$

d'où nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 2, 3, 5, 1 ;$$

mais 2 et 5 sont des non-résidus triangulaires pour le module 7, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1, 3 \pmod{7}$$

d'où

$$y = \dot{7} + 1, 2, 4, 5 .$$

Pour le module 13,

$$3 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 2, 3, 6, 8, 10$$

d'où il faudrait

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 10, 11, 12, 0, 3, 5, 7 ;$$

mais 11, 12, 5 et 7 sont des non-résidus triangulaires pour le module 13, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 3, 10 \pmod{13}$$

d'où

$$y = \dot{13} + 0, 2, 4, 8, 10, 12 .$$

Après avoir supprimé du tableau les nombres qui ne sont pas $\dot{3}+1$; $\dot{11}+1, 3, 4, 6, 7, 9$; $\dot{7}+1, 2, 4, 5$; $\dot{13}+0, 2, 4, 8, 10, 12$, il ne reste plus que les nombres

$$103 , \quad 106 \quad \text{et} \quad 166 .$$

Aucun d'eux ne fournit de solution : par suite, si 40199 est composé, son plus petit diviseur ne peut dépasser 67. Si nous prenons maintenant $a = 300$ et si du 214$^{\text{ième}}$ triangulaire au 300$^{\text{ième}}$, nous ne trouvons pas de solution, c'est que les diviseurs à essayer sont moindres que

$$\frac{\sqrt{321592 + 361201} - 601}{4} = 56 , \ldots ,$$

donc non supérieurs à 53 ; si, au contraire, nous trouvons une solution entre les limites considérées, le nombre N admettra un diviseur plus grand que 53 et non supérieur à 67. Considérons donc les triangulaires dont les rangs sont les suivants :

		216	218
221	223	226	228
231	233	236	238
241	243	246	248
251	253	256	258
261	263	266	268
271	273	276	278
281	283	286	288
291	293	296	298

Après en avoir éliminé les nombres qui ne sont pas $\dot{3}+1$; $\dot{11}+1, 3, 4, 6, 7, 9$; $\dot{7}+1, 2, 4, 5$; $\dot{13}+0, 2, 4, 8, 10, 12$, il ne reste plus que les nombres

$$268 \quad \text{et} \quad 298 .$$

Le triangulaire de rang 268, augmenté du nombre 40199, donne le triangulaire de rang 390 ; par suite,

$$40199 = 76245 - 36046 \quad \text{ou} \quad \frac{390^2 + 390}{2} - \frac{268^2 + 268}{2}$$

$$= \frac{(390 - 268)(390 + 268 + 1)}{2}$$

$$= 61 \times 659 .$$

2me méthode. — Nous avons démontré le théorème suivant :

« *Les nombres composés qui ne sont pas de la forme* 2^k, *pour* $k \geqq 2$, *sont tous contenus dans l'expression*

$$\frac{u(2v - u + 1)}{2},$$

les nombres u *et* v *satisfaisant aux conditions simultanées* $v \geqq u \geqq 3$.

Si nous posons

$$\frac{u(2v - u + 1)}{2} = N \qquad \text{ou} \qquad u^2 - u(2v + 1) + 2N = 0$$

nous en déduisons

$$u = \frac{2v + 1 \pm \sqrt{(2v + 1)^2 - 8N}}{2}.$$

Le nombre u n'est rationnel que si

$$(2v + 1)^2 - 8N = y^2 \qquad \text{ou} \qquad 8N + y^2 = x^2 \tag{5}$$

en posant $2v + 1 = x$; lorsque N est premier, les seules valeurs de x et de y satisfaisant à l'équation sont

$$x = N + 2, \qquad y = N - 2;$$

et

$$x = 2N + 1, \qquad y = 2N - 1.$$

Si N est composé, il existe au moins un carré impair moindre que $(N - 2)^2$ qui, ajouté à 8N, donne un carré x^2; une décomposition de N en un produit de deux facteurs est alors donnée par l'égalité

$$N = \frac{(x - y)(x + y)}{8}.$$

Nous supposons N impair et débarrassé des facteurs 5, donc terminé par 1, 3, 7 ou 9 en sorte que 8N sera terminé par 8, 4, 6 ou 2; par suite les carrés impairs étant terminés par 1, 5, ou 9 :

si 8N est terminé par 8, les carrés à ajouter seront ceux

terminés par 1, carrés dont les racines sont terminées par 1 et 9;

si 8N est terminé par 4, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 1 et 5, carrés dont les racines sont terminées par 1, 9 et 5;

si 8N est terminé par 6, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 5 et 9, carrés dont les racines sont terminées par 5, 3 et 7;

si 8N est terminé par 2, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 9, carrés dont les racines sont terminées par 3 et 7.

Observons en outre que les carrés terminés par 1 sont aussi terminés par 01, 21, 41, 61, 81, — que les carrés terminés par 5, le sont par 25, — que les carrés terminés par 9, le sont par 09, 29, 49, 69, 89.

Soient maintenant, *pour le module* δ,

$$8N \equiv \rho \qquad \text{et} \qquad x^2 \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n ;$$

de l'égalité (5) nous déduisons

$$\rho + y^2 \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$$

et nous devrions avoir

$$y^2 \equiv \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho, \rho_3 - \rho, \dots, \rho_n - \rho$$

ou

$$y^2 \equiv r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$$

en posant $\rho_i - \rho = r_i$; mais des résidus r_i ainsi obtenus, nous ne pourrons conserver que ceux qui sont quadratiques et font partie de la suite ρ_i, puisque y^2 est un carré : la suite des carrés impairs à ajouter à 8N se trouvera ainsi considérablement réduite et cette suite se réduira pour chaque nouveau diviseur δ employé.

Limite des opérations. Puisque

$$8N = (x - y)(x + y) ,$$

le facteur $(x - y)$ est le plus petit diviseur de 8N; si nous ne trouvons pas de solution y inférieure à une certaine li-

mite a, nous en conclurons

$$y > a ,$$

par suite

$$x > \sqrt{8N + a^2}$$

et

$$x + y > \sqrt{8N + a^2} + a .$$

Mais $x - y = \frac{8N}{x + y}$; donc

$$x - y < \frac{8N}{\sqrt{8N + a^2} + a} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{8N + a^2} - a .$$

Si $2s + 1$ et $2\sigma + 1$ sont deux diviseurs de N dont le produit égale N lui-même, à ces diviseurs correspondent les deux solutions données par les systèmes d'équations

1er système : $x - y = 2(2s + 1)$; $\quad x + y = 4(2\sigma + 1)$.

2e système : $x - y = 4(2s + 1)$; $\quad x + y = 2(2\sigma + 1)$.

Par conséquent si $\lambda < 8N < (\lambda + 1)^2$, les diviseurs que les essais ont éliminés sont ceux compris entre $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{2}$, ainsi que ceux compris entre $\frac{\lambda}{4}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4}$. Mais si les diviseurs que nous cherchons sont les diviseurs moindres que $\sqrt{N}$, la limite inférieure de a sera la partie entière de la valeur de α satisfaisant à l'équation

$$\frac{\sqrt{8N + \alpha^2} - \alpha}{2} = \sqrt{N} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \sqrt{N} ; \qquad (6)$$

si nous prenons, comme première limite supérieure, la partie entière par excès de la valeur de a satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{2} = \frac{\lambda}{4} \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{32N - \lambda^2}{4\lambda} , \qquad (7)$$

les diviseurs éliminés seront ceux compris entre $\sqrt{N}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4}$. En d'autres termes, p étant le plus grand nombre premier contenu dans cette dernière limite, il res-

tera à essayer tous les diviseurs premiers non supérieurs à p, hormis les diviseurs des modules employés; et si le nombre N n'est divisible par aucun d'eux, nous en conclurons que N est un nombre premier.

Les divisions les plus rapides sont celles par 9 et par 11; aussi ce sont là les premiers diviseurs à employer. En procédant par limites successives, à partir de $\alpha = \sqrt{N}$, on arrivera à décomposer tout nombre, quelque grand qu'il soit!

Exemple. Soit à décomposer le nombre 40199; résolvons l'équation

$$8 \times 40199 + y^2 = x^2 \quad \text{ou} \quad 321592 + y^2 = x^2 \ . \qquad (8)$$

Observons, avant tout, que 40199 n'est divisible par aucun des nombres 3, 7, 11 et 13 dont nous allons nous servir comme modules; de plus, 321592 étant terminé par 2, les carrés à ajouter sont ceux terminés par 9, carrés dont les racines sont terminées par 3 et 7.

Puisque $200^2 < 40199 < 201^2$ et $567^2 < 321592 < 568^2$, les relations (6) et (7) donnent pour limite inférieure $\alpha = 200$ et pour limite supérieure $a = 426$; considérons donc les nombres

203	253	303	353	403
207	257	307	357	407
213	263	313	363	413
217	267	317	367	417
223	273	323	373	423
227	277	327	377	
233	283	333	383	
237	287	337	387	
243	293	343	393	
247	297	347	397	

Si aucun de ces nombres ne fournit de solution, les diviseurs restant à essayer seront moindres que

$$\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4} = \frac{\sqrt{321592 + 181476} - 426}{4} = 70 \ , \ \ldots$$

donc non supérieurs à 67.

L'égalité (8) donne successivement :

Pour le module 9,

$$4 + y^2 \equiv 0, 1, 4, 7$$

d'où on devrait avoir

$$y^2 \equiv 5, 6, 0, 3 ;$$

mais 5, 6 et 3 sont des non-résidus quadratiques pour le module 9, par suite

$$y^2 \equiv 0 \pmod 9$$

d'où

$$y = \dot{3} .$$

Pour le module 11,

$$-4 + y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9$$

d'où il faudrait

$$y^2 \equiv 4, 5, 7, 8, 9, 2 ;$$

mais 7, 8 et 2 sont des non-résidus quadratiques pour le module 11, par suite

$$y^2 \equiv 4, 5, 9 \pmod{11}$$

d'où

$$y = \dot{11} + 2, 3, 4, 7, 8, 9 .$$

Pour le module 7,

$$5 + y^2 \equiv 0, 1, 2, 4$$

d'où nous devrions avoir

$$y^2 \equiv 2, 3, 4, 6 ;$$

mais 3 et 6 sont des non-résidus quadratiques pour le module 7, par suite

$$y^2 \equiv 2, 4 \pmod 7$$

d'où

$$y = \dot{7} + 2, 3, 4, 5 .$$

Pour le module 13,

$$11 + y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12$$

d'où il faudrait

$$y^2 \equiv 2, 3, 5, 6, 11, 12, 1 ;$$

mais 2, 5, 6 et 11 sont des non-résidus quadratiques pour le module 13, par suite

$$y^2 \equiv 1, 3, 12 \pmod{13}$$

d'où

$$y = \dot{13} + 1, 4, 5, 8, 9, 12 .$$

Après avoir supprimé du tableau les nombres qui ne sont pas $\dot{3}$; $\dot{11}+2, 3, 4, 7, 8$ ou 9; $\dot{7}+2, 3, 4$ ou 5; $\dot{13}+1, 4, 5, 8, 9$ ou 12, il ne reste plus que les nombres

$$207\ , \quad 213 \quad \text{et} \quad 333\ .$$

Aucun d'eux ne fournit de solution : par suite, si 40199 est composé, son plus petit diviseur ne peut dépasser 67. Si nous prenons maintenant $a = 600$ et si pour cette limite nous ne trouvons pas de solution, c'est que les diviseurs restant à essayer sont moindres que $\frac{\sqrt{321592+360000}-600}{4} = 56\ , \ldots\ ,$ donc non supérieurs à 53. Considérons les carrés dont les racines sont

	453	503	553
	457	507	557
	463	513	563
	467	517	567
	473	523	573
427	477	527	577
433	483	533	583
437	487	537	587
443	493	543	593
447	497	547	597

Après en avoir éliminé les nombres qui ne sont pas $\dot{3}$; $\dot{11}+2, 3, 4, 7, 8$ ou 9; $\dot{7}+2, 3, 4$ ou 5; $\dot{13}+1, 4, 5, 8, 9$ ou 12, il ne reste plus que les nombres

$$537 \quad \text{et} \quad 597\ .$$

Le carré de racine 537, augmenté du nombre 321592, donne le carré de racine 781 :

$$\begin{aligned} 8 \times 40199 &= 609961 - 288369 \qquad \text{ou} \qquad 781^2 - 537^2 \\ &= (781 - 537)(781 + 537) \\ &= 244 \times 1318\ ; \end{aligned}$$

par suite

$$40199 = 61 \times 659\ .$$

3me méthode. — L'équation

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2}, \tag{9}$$

étant possible en nombres entiers pour toute valeur de N, soient *pour le module* δ :

$$N \equiv \rho \quad \text{et} \quad \frac{x(x+1)}{2} \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n ;$$

de l'égalité (9) nous déduisons

$$\rho z \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$$

d'où

$$z \equiv r_1, r_2, r_3, \dots, r_n . \pmod{\delta}$$

Rappelons de plus que si N est composé, le multiplicateur z est moindre que $\frac{\frac{N+1}{2} \times \frac{N+3}{2}}{2N}$; si λ est le plus grand entier contenu dans cette limite, nous éliminerons de la suite des multiplicateurs

$$1, 2, 3, 4, \dots, \lambda \tag{10}$$

ceux qui ne sont pas de la forme z pour le module δ et le nombre d'essais se réduira considérablement. Si nous ne trouvons aucune valeur de z comprise dans la suite (10) ainsi réduite, rendant le produit Nz triangulaire, nous en conclurons que N est premier.

Observons que si N est terminé par 1, puisque le chiffre des unités des triangulaires est 0, 1, 3, 5, 6 ou 8, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8; que si N est terminé par 3, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 2, 5, 6 et 7; que si N est terminé par 7, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 3, 4, 5, 8 et 9; que si N est terminé par 9, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 2, 4, 5, 7 et 9.

Exemple. Soit à décomposer le nombre 4321; résolvons l'équation

$$4321 \times z = \frac{x(x+1)}{2} . \tag{11}$$

Si 4321 est composé, cette équation admet au moins une solution pour $z \leq 540$; de plus, le nombre à décomposer étant terminé par 1, les multiplicateurs z à considérer sont ceux terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8.

De l'égalité (11) nous déduisons successivement :

pour le module 9,

$$z \equiv 0, 1, 3, 6 \qquad \text{d'où} \quad z = \dot{9} + 0, 1, 3, 6 ;$$

pour le module 11,

$$9z \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 10 \qquad \text{d'où} \quad z = \dot{11} + 0, 4, 5, 6, 8, 9 ;$$

pour le module 7,

$$2z \equiv 0, 1, 3, 6 \qquad \text{d'où} \quad z = \dot{7} + 0, 3, 4, 5 ;$$

pour le module 13,

$$5z \equiv 0, 1, 2, 3, 6, 8, 10 \qquad \text{d'où} \quad z = \dot{13} + 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12 .$$

Convenons de prendre les valeurs de z non supérieures à 150 et considérons la suite des multiplicateurs :

1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20,
21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 35, 36, 38, 40,
41, 43, 45, 46, 48, 50, 51, 53, 55, 56, 58, 60,
61, 63, 65, 66, 68, 70, 71, 73, 75, 76, 78, 80,
81, 83, 85, 86, 88, 90, 91, 93, 95, 96, 98, 100,
101, 103, 105, 106, 108, 110, 111, 113, 115, 116, 118, 120,
121, 123, 125, 126, 128, 130, 131, 133, 135, 136, 138, 140,
141, 143, 145, 146, 148, 150 .

Si de cette suite nous supprimons les nombres qui ne sont pas $\dot{9} + 0, 1, 3, 6$; $\dot{11} + 0, 4, 5, 6, 8, 9$; $\dot{7} + 0, 3, 4, 5$; $\dot{13} + 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12$, il reste les nombres suivants :

28 ; 60 ; 63 ; 81 ; 126 ; 138 .

Le produit $4321 \times 126 = 544446$ représente le $1043^{\text{ième}}$ triangulaire ; par suite

$$4321 \times 126 = \frac{1043 \times 1044}{2}$$

et

$$4321 = 149 \times 29 .$$

4me méthode. — L'équation

$$8Nz + 1 = y^2 , \qquad (12)$$

étant possible en nombres entiers pour toute valeur de N, soient *pour le module* δ :

$$8N \equiv \rho \qquad \text{et} \qquad y^2 \equiv \rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \dots , \rho_n ;$$

de l'égalité (12) nous déduisons

$$\rho z + 1 \equiv \rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \dots , \rho_n$$

$$\rho z \equiv \rho_1 - 1 , \rho_2 - 1 , \rho_3 - 1 , \dots , \rho_n - 1$$

par suite

$$z \equiv r_1 , r_2 , r_3 , \dots , r_n . \qquad (\text{mod } \delta)$$

Rappelons que si N est composé, le multiplicateur z est moindre que $\dfrac{\frac{N+1}{2} \times \frac{N+3}{2}}{2N}$; le chiffre des unités des nombres carrés étant 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, il s'ensuit que si N est terminé par 1, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8; si N est terminé par 3, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 2, 5, 6 et 7; si N est terminé par 7, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 3, 4, 5, 8 et 9; que si N est terminé par 9, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 2, 4, 5, 7 et 9.

Exemple. Soit à décomposer le nombre 4321; résolvons l'équation

$$8 \times 4321 \times z + 1 = y^2 \qquad \text{ou} \qquad 34568z + 1 = y^2 . \qquad (13)$$

Si 4321 est composé, cette équation admet au moins une solution pour $z \leq 540$; de plus, le nombre à décomposer étant terminé par 1, les multiplicateurs z à considérer sont ceux terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8.

De l'égalité (13) nous déduisons successivement :

pour le module 9,

$$8z + 1 \equiv 0 , 1 , 4 , 7 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{9} + 0 , 1 , 3 , 6 ;$$

pour le module 11,

$$6z + 1 \equiv 0 , 1 , 3 , 4 , 5 , 9 \qquad \text{d'où} \qquad z = 1\dot{1} + 0 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 ;$$

pour le module 7,

$2z+1 \equiv 0, 1, 2, 4$ d'où $z = \dot{7} + 0, 3, 4, 5$;

pour le module 13,

$z+1 \equiv 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12$ d'où $z = \dot{13} + 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12$.

Si nous ne prenons, ainsi que dans la méthode précédente, que les valeurs de z non supérieures à 150, les valeurs subsistant après l'emploi des modules 9, 11, 7 et 13 sont encore

$$28 ; \quad 60 ; \quad 63 ; \quad 81 ; \quad 126 ; \quad 138 .$$

Un seul de ces nombres, $z = 126$, fournit une solution de l'équation et donne

$$8 \times 4321 \times 126 + 1 = 4355569 \quad \text{ou} \quad 2087^2$$
$$8 \times 4321 \times 126 = 2086 \times 2088$$
$$4321 \times 7 \times 9 = 1043 \times 261 ;$$

par conséquent

$$4321 = 149 \times 29 ;$$

Observation. — Les deux premières méthodes se déduisent l'une de l'autre, ainsi que les deux dernières : en effet, si nous posons $x - y = u$ et $x + y = 2v - u$, l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} = \mathrm{N} \quad \text{devient} \quad \frac{u(2v-u+1)}{2} = \mathrm{N} ;$$

ensuite de l'équation

$$\mathrm{N}z = \frac{x(x+1)}{2} ,$$

nous déduisons

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\mathrm{N}z}}{2}$$

et x n'est rationnel que si

$$1 + 8\mathrm{N}z = y^2 .$$

Il est bon de remarquer que la série des nombres triangulaires s'obtient par additions successives et qu'il serait plus facile d'étendre la table des 5000 premiers triangulaires que nous avons créée que la table des carrés, déjà fort étendue cependant.

Edouard BARBETTE (Liège).