SUR LES POSTULATS
DE L'ORDRE LINÉAIRE OUVERT

Un ensemble L, dont les éléments seront appelés *points*, étant ordonné linéairement, on appellera *ensemble initial* toute *portion*[1] de L contenant tous les points qui *précèdent* chacun de ses propres éléments. On appellera segment *initial* et on désignera par $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des points qui précèdent un point déterminé A; enfin on appellera *arc initial* et on désignera par $\mathcal{A}(A)$ l'ensemble formé par un point déterminé A et par les points qui le précèdent, de sorte que l'on a : $\mathcal{A}(A) \equiv \mathcal{S}(A) + A$.

On va d'abord établir certaines propriétés des ensembles ainsi définis.

J I. *Parmi deux ensembles initiaux distincts quelconques il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

Les deux ensembles étant distincts, il y en a toujours un $\mathcal{E}$ qui contient au moins un point A qui n'appartient pas à l'autre $\mathcal{E}'$. Un point quelconque de $\mathcal{E}'$, étant alors distinct de A et ne pouvant pas être précédé par A (déf. des ensembles initiaux), doit précéder celui-ci et, par conséquent, doit appartenir à $\mathcal{E}$ (même définition) ; $\mathcal{E}'$, ne contenant ainsi que des points de $\mathcal{E}$ et ne contenant pas A, est donc bien une *portion* de $\mathcal{E}$.

J II. *Parmi deux points distincts quelconques il y en a toujours un qui appartient à un ensemble initial au moins ne contenant pas l'autre point.*

En effet, les deux points étant distincts, il y en a un A qui précède l'autre, B ; l'ensemble formé par A et par les points qui précèdent A satisfait évidemment à la définition des ensembles initiaux et ne contient pas B, qui est, par hypothèse, distinct de A et ne le précède pas.

Les propriétés suivantes sont quasi-évidentes.

1. *Tout point qui précède un autre point* A *appartient toujours à un ensemble initial au moins qui ne contient pas* A.

2. *Pour qu'un ensemble soit initial, il faut et il suffit qu'il contienne tous les points du segment (de l'arc) initial défini par chacun de ses propres points.*

[1] La signification de ce mot est transparente.

3. *Un arc (segment) initial (ne) contient (pas) le point qui le définit.*

4. *Tout segment (arc) est un ensemble initial.*

5. *Un ensemble initial qui contient tous les points de* $\mathcal{S}$(A) *contient* A *ou est identique à* $\mathcal{S}$(A).

En effet, si un ensemble initial $\mathcal{E}$ ne contient pas A, il ne peut contenir aucun des points qui sont précédés par A (déf. des ensembles initiaux) ; il ne peut donc contenir que des points qui précèdent A, c'est-à-dire des points de $\mathcal{S}$(A) et, si en outre il contient tous les points de $\mathcal{S}$(A), on a bien $\mathcal{E} = \mathcal{S}$(A).

6. *Le segment initial* $\mathcal{S}$(A) *est identique à l'ensemble des points de tous les ensembles initiaux qui ne contiennent pas* A.

Les propositions suivantes sont particulièrement importantes en raison du rôle qu'elles jouent dans la définition d'*un* ordre linéaire.

B I. *Tout point définit toujours un et seulement un segment (arc initial.*

Cette propriété résulte évidemment directement des caractères logiques de la définition des segments et des arcs initiaux.

B II. *Parmi deux segments (arcs) initiaux quelconques, il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

En effet, parmi deux points distincts il y en a toujours un, soit A, qui précède l'autre, soit B, et qui, par conséquent, appartient à un ensemble initial au moins $\mathcal{E}$ ne contenant pas celui-ci (1); les points de $\mathcal{E}$ doivent alors appartenir à $\mathcal{S}$(B) et à $\mathcal{A}$(B) (déf. des segments et des arcs initiaux) et, par suite, les points de $\mathcal{S}$(A) et de $\mathcal{A}$(A), qui doivent tous appartenir à $\mathcal{E}$ (2), doivent aussi appartenir à $\mathcal{S}$(B) et à $\mathcal{A}$(B). Mais $\mathcal{S}$(B) ($\mathcal{A}$(B)) contient toujours au moins un point, savoir A(B), qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$(A) ($\mathcal{A}$(A)) (3) ; $\mathcal{S}$(A) est donc bien une portion de $\mathcal{S}$(B) et $\mathcal{A}$(A) une portion de $\mathcal{A}$(B).

Il est à peine nécessaire d'observer que des portions de L qui possèdent les propriétés B I et B II établies pour les segments et les arcs initiaux définissent toujours un ordre linéaire pour les points de L, sans être nécessairement les segments ou les arcs de cet ordre linéaire et même sans en être des ensembles initiaux. C'est ainsi que la définition classique de l'ordre de grandeur des nombres ne met en jeu que les ensembles initiaux de l'ensemble des nombres rationnels.

On peut aussi substituer à B II, pour la définition d'un ordre linéaire, les propositions suivantes.

B 0. *Tout arc (aucun segment ne) contient le point qui le définit.*

Parmi deux points distincts

B II[1] *il y en a toujours un*

B II[2] *et un seulement qui appartient au segment (à l'arc) initial défini par l'autre.*

B II[3]. Si A appartient à $\mathcal{S}(B)$ ($\mathfrak{A}(B)$), tout point de $\mathcal{S}(A)$ ($\mathfrak{A}(A)$) appartient aussi à $\mathcal{S}(B)$ ($\mathfrak{A}(B)$).

Si l'on définit un ordre linéaire en convenant qu'un point A en précède un autre B lorsqu'il appartient au segment (à l'arc) défini par celui-ci, les trois dernières propositions ne sont évidemment qu'une expression des propriétés qui caractérisent l'ordre linéaire, savoir : « parmi deux points distincts il y en a toujours un et un « seulement qui précède l'autre; si A précède B, tout point qui « précède A précède aussi B. »

La proposition B II est une conséquence des propositions B 0, B II[1], B II[2] et B II[3].

En effet, parmi deux points distincts il y en a toujours un, par exemple A, qui appartient au segment et à l'arc définis par l'autre (B II[1]), soit à $\mathcal{S}(B)$ et à $\mathfrak{A}(B)$; alors tout point de $\mathcal{S}(A)$ ou de $\mathfrak{A}(A)$ appartiendra à $\mathcal{S}(B)$ et à $\mathfrak{A}(B)$ (B II[3]), et B n'appartiendra ni à $\mathcal{S}(A)$ ni à $\mathfrak{A}(A)$ (B II[2]). Comme d'ailleurs $\mathcal{S}(A)$ ne contient pas A et que $\mathfrak{A}(B)$ contient B (B 0), $\mathcal{S}(B)$ ($\mathfrak{A}(B)$) contiendra toujours au moins un point, savoir A (B), qui n'appartient pas à $\mathcal{S}(A)$ ($\mathfrak{A}(A)$). On a donc bien $\mathcal{S}(A) < \mathcal{S}(B)$, $\mathfrak{A}(A) < \mathfrak{A}(B)$.

On va montrer enfin que des portions de L qui possèdent les propriétés exprimées pour les ensembles initiaux par les propositions J I et J II permettent toujours de définir des portions de L qui possèdent les propriétés B I — B II et, par conséquent, permettent de définir un ordre linéaire pour les points de L [1].

Il suffit en effet de prendre comme définition du segment initial de cet ordre la propriété qui fait l'objet de la proposition 6 en substituant aux ensembles initiaux les portions de L données, qui sont évidemment des ensembles initiaux de l'ordre ainsi défini, mais peuvent ne pas comprendre tous ceux-ci.

De la définition ainsi adoptée pour les segments initiaux de l'ordre considéré résulte immédiatement la proposition B I. La proposition B II peut alors être établie de la manière suivante.

Parmi deux points distincts il y en a toujours un, par exemple A, qui appartient à l'une au moins, soit $\mathcal{E}$, des portions données de L ne contenant pas l'autre point (B II), soit B ; $\mathcal{S}(A)$ (nouvelle définition) figurant évidemment parmi les dites portions et ne contenant pas le point A [nouvelle déf. de $\mathcal{S}(A)$], est nécessairement une portion de $\mathcal{E}$ (J I), qui, figurant parmi les ensembles constituants de $\mathcal{S}(B)$ (cf. 6), doit être lui-même une portion de $\mathcal{S}(B)$ ou être identique à ce dernier ensemble. Dans tous les cas on a bien

$$\mathcal{S}(A) < \mathcal{E} \leqq \mathcal{S}(B) \qquad \text{et, par suite,} \qquad \mathcal{S}(A) < \mathcal{S}(B) .$$

Enfin, d'après leur nouvelle définition, aucun des ensembles

[1] C'est le cas pour l'ensemble de tous les nombres, puisque l'on définit leur ordre de grandeur au moyen des segments initiaux de l'ensemble des nombres irrationnels.

$\mathcal{S}$(A) ne contient le point qui le définit; ces ensembles sont donc bien, d'après une remarque déjà faite, les segments initiaux de l'ordre linéaire ainsi défini.

Il conviendrait sans doute de caractériser par un terme spécial les ensembles de portions de L qui satisfont aux propositions J I et J II prises comme axiomes; mais on ne saurait évidemment apporter trop de réserve dans l'introduction de nouveaux termes et l'on se bornera ici à ce qui a paru strictement nécessaire.

II

On appellera *segment* l'ensemble des points *compris* entre A et B et *arc* l'ensemble formé par A, B et les points qu'ils comprennent. On désignera l'un et l'autre indifféremment de ces ensembles par AB ou BA. On reconnaîtra facilement que de la notion d'ordre linéaire ouvert et de la définition des segments et des arcs résultent les propriétés suivantes.

A″. *Deux points distincts quelconques définissent toujours un et seulement un segment (arc) et seront appelés ses extrémités.*

A 0. *Tout arc (aucun segment ne) contient ses extrémités.*

Parmi trois points distincts l'un de l'autre,

A I *il y en a toujours un*

A II *et un seulement qui appartient au segment (à l'arc) défini par les deux autres.*

Trois points quelconques distincts l'un de l'autre étant donnés,

A III *tout point qui appartient au segment (à l'arc) défini par deux de ses points et qui est distinct du troisième, appartient toujours aussi à l'un au moins des deux autres segments (arcs) définis par les trois points* ($AB - C \leqq \mathfrak{M}(AC, BC)$).

A IV *et ces trois ensembles ont au plus un point commun* ($\mathfrak{D}(AB, AC, BC) =$ *au plus un point commun*).

Si C *est un point de* AB,

A V *tout point de* AC *ou de* BC *appartient toujours à* AB

$$(\mathfrak{M}(AC, BC) \leqq AB)$$

et tout point de AB *distinct de* C *appartient toujours*

A III[1] *à l'un au moins des ensembles* AC *et* BC

$$(AB - C \leqq \mathfrak{M}(AC, BC)) ,$$

A VI *et ces deux ensembles n'ont en commun aucun point distinct de* C ($\mathfrak{D}(AC, BC) - C = 0$).

Si C *n'appartient pas à* AB,

A III^2 *tout point de* AB *appartient à l'un au moins des ensembles* AC *et* BC

A VII *et tous les points de* AB *appartiennent à l'un des ensembles* AC *et* BC.

A la suite de certaines des propositions précédentes ont été écrites des formules, qui les expriment dans la notation de G. Cantor, où, comme l'on sait, la lettre $\mathfrak{M}$ signifie « ensemble des points de » et la lettre $\mathfrak{D}$ « partie commune de », la signification des signes habituels étant d'ailleurs triviale. On a les relations évidentes

$$\mathfrak{D}(\mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}') \leqq \mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}'\,, \qquad \mathfrak{D}[\mathrm{E}\,,\ \mathfrak{D}(\mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}')] = \mathfrak{D}(\mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}')\,.$$

On signale en outre la proposition suivante :

Si l'on a $\mathrm{E} > \mathrm{E}'$, on a :

$$\mathfrak{D}(\mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}') = \mathrm{E}'\,, \qquad \mathfrak{D}(\mathrm{E}\,,\ \mathrm{E}'') \geqq \mathfrak{D}(\mathrm{E}'\,,\ \mathrm{E}'')\,.$$

Les deux propositions A V et A III^1 peuvent évidemment être réunies dans la suivante :

Si C *est un point de* AB, *cet ensemble est identique à l'ensemble des points de* AC *et de* BC, *au point* C *près.*

Une telle propriété peut être exprimée par la formule

$$\mathrm{AB} - \mathrm{C} = \mathfrak{M}(\mathrm{AC}\,,\ \mathrm{BC})\,,$$

le point C étant à retrancher ou non selon qu'il s'agit des segments ou des arcs.

A III n'est évidemment rien autre que le résultat de la réunion des propositions A III^1 et A III^2 ($\text{III} = \mathfrak{D}(\text{III}^1,\ \text{III}^2)$), la première étant d'ailleurs simplement l'application de A III aux points de AB et la seconde, son application à tous les autres points; en outre, A III^2 est évidemment une conséquence directe de A VII ($\text{III}^2 > \text{VII}$).

Les propositions A présentent d'ailleurs d'autres relations logiques qu'il importe d'établir.

1. A II *est une conséquence de* A V *et* A VI ($\text{II} \geqq \mathfrak{D}(\text{V},\ \text{VI})$).

Il suffit d'établir que, si C est un point de AB distinct de A, ce dernier point ne peut appartenir à BC.

En effet, tout point de AC doit alors appartenir à AB (A V) et, par conséquent, devrait, en vertu du même axiome et si A appartenait à BC, appartenir aussi à ce dernier ensemble ($\mathrm{AC} \leqq \mathrm{AB} \leqq \mathrm{BC}$), ce qui est incompatible avec A VI (à plus forte raison avec A IV), à moins que AC ne contienne aucun point distinct de C. La proposition est donc établie en général, mais la démonstration tombe en défaut lorsqu'il existe des segments ne contenant aucun point, ce qui est le cas pour les ordres linéaires *discrets* définis par leurs segments.

2. A IV *est une conséquence de* A II *et* A III¹ (IV $\geqq \mathcal{D}$(II, III¹)).

Il suffit évidemment d'établir que, si deux points D et D′ distincts l'un de l'autre appartiennent tous les deux à AB et à AC, l'un des deux seulement peut appartenir aussi à BC.

Puisque les points D et D′ appartiennent à la fois à AB et à AC, D′ doit au moins appartenir à AD ou bien à BD et à CD (A III¹), et si, en outre, les deux points D et D′ appartenaient tous les deux à BC, D′ devrait aussi appartenir, d'après le même axiome, à l'un au moins des ensembles BD et CD, de sorte que, dans ce cas, il devrait appartenir à deux au moins des ensembles AD, BD et CD.

Pour des raisons semblables, D devrait aussi appartenir à deux au moins des ensembles AD′, BD′ et CD′, de sorte que, parmi les trois points A, B, C il y en aurait au moins un définissant respectivement avec D et D′ deux segments (arcs) dont chacun contiendrait celui de ces deux points qu'il n'admet pas comme extrémité, ce qui est précisément la propriété écartée par l'axiome A II. La proposition est donc bien établie.

3. A VI *est une conséquence de* A IV *et* A V (VI $\geqq \mathcal{D}$(IV, V)) *et, par conséquent, de* A II, A III¹ *et* A V.

Si D est un point appartenant à la fois à AC et à BC, tout point de CD devra appartenir à la fois à AC et à BC et devra, en outre, si C appartient à AB, appartenir à AB (A V). Il résulte donc de là que si AC et BC avaient en commun un point D distinct de C, tout point de CD appartiendrait aussi à la fois à AB, à AC et à BC, ce qui est incompatible avec A IV, à moins que CD ne contienne aucun point. La proposition est donc établie sous la réserve déjà formulée pour la proposition 1.

4. *Chacun des groupes de propositions* (A II, A V, A III¹), (A V, A VI, A III¹) *et* (A IV, A V, A III¹) *complété par* A″ *et* A 0 *permet de définir un ordre linéaire pour les points d'un segment (arc) quelconque.*

En premier lieu, l'équivalence de ces groupes de propositions résulte du simple rapprochement des relations logiques exprimées par les propositions 1, 2 et 3, et l'on peut remarquer aussi que, en appliquant aux formules qui figurent à la suite de ces propositions les propriétés indiquées pour l'algorithme $\mathcal{D}$ (p. 283), on obtient les nouvelles relations logiques suivantes :

$$\mathcal{D}(\text{II, V, III}^1) \geqq \mathcal{D}(\text{V, VI, III}^1) \geqq \mathcal{D}(\text{II, V, III}^1)\ ,$$

$$\mathcal{D}(\text{V, VI, III}^1) \geqq \mathcal{D}(\text{IV, V, III}^1) \geqq \mathcal{D}(\text{II, V, III}^1)\ ,$$

d'où l'on déduit évidemment

$$\mathcal{O}(\mathrm{II}, \mathrm{V}, \mathrm{III}^1) = \mathcal{O}(\mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{III}^1) = \mathcal{O}(\mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{III}^1) .$$

Enfin, les axiomes B I et B II de l'ordre linéaire seront bien satisfaits pour les points de AB si l'on établit la proposition suivante :

5. *Si* C *et* D *sont deux points distincts quelconques de* AB, *parmi les deux ensembles* AC *et* AD *il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

On établira d'abord le lemme suivant :

Lemme. *Si* C *est un point de* AB *et est distinct de* A *et de* B, AC *est toujours une portion de* AB.

En effet, tout point de AC appartient à AB (V) ; en outre, dans le cas des arcs, B appartient à AB et, dans le cas des segments, C n'appartient pas à AC (A 0). Comme d'ailleurs B n'appartient jamais à AC (A II) et que C, par hypothèse, appartient à AB, ce dernier ensemble contient toujours au moins un point qui n'appartient pas à l'autre ; AC est donc bien une portion de AB.

Il importe pour la suite, d'observer que le lemme a été établi au moyen de A 0, A II et A V et, par conséquent, indépendamment de A III^1.

Quant à la proposition principale, elle est satisfaite, en vertu du lemme, si C appartient à AD. Dans le cas contraire, C doit appartenir à BD (A III^1) et D, ne pouvant alors appartenir à BC (A II), devra appartenir à AC (A III^1) ; l'on est donc ainsi ramené au cas précédent, les rôles des points C et D étant seulement intervertis.

Il résulte de là que toutes les propositions visées dans l'énoncé de la proposition 4 sont toujours satisfaites, en particulier, pour un ensemble quelconque d'arcs ou de segments linéaires dont chacun est défini par ses extrémités, ainsi, par exemple, qu'un ensemble de segments rectilignes.

6. A V *est une conséquence de* A II, A III^2 *et* A VI *et, par conséquent, de* A II *et* A III ($\mathrm{V} \geqq \mathcal{O}(\mathrm{II}, \mathrm{III}^2, \mathrm{VI}) \geqq \mathcal{O}(\mathrm{II}, \mathrm{III})$).

1° En effet, si C appartient à AB, B ne peut appartenir à AC (A II) ; et, par suite, tout point de AC doit appartenir à l'un au moins des ensembles AB et BC (A III^2), et, s'il est distinct de C, comme il ne peut appartenir à BC (A VI), il devra nécessairement appartenir à AB. Comme C appartient aussi d'ailleurs, par hypothèse, à AB, tous les points de AC appartiennent bien à AB et la même propriété se démontrerait évidemment pour BC au moyen d'un raisonnement en tout semblable.

Des propositions 1, 2, 3 et 6 résulte évidemment la suivante :

7. *Les trois groupes de propositions* (A II, A III), (A V, A VI, A III) *et* (A IV, A V, A III) *sont équivalents.*

La figure ci-contre réalise un ensemble de points pour lesquels toutes ces propositions sont satisfaites si l'on prend comme segment défini par deux points quelconques de la figure le trajet simple qui les réunit.

8. A VII *est une conséquence de* A I *et* A V.

En effet, si C n'appartient pas à AB, l'un des deux points A et B, par exemple B, doit appartenir au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces points et par A (A I), soit à AC, et alors tous les points de AB devront bien appartenir à AC (A V).

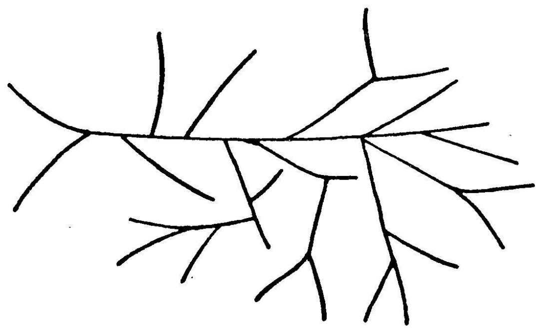
9. A I *est une conséquence de* A IV *et* A VII.

Si B n'appartient pas à AC ni A à BC, tous les points de AC doivent appartenir à AB ou à BC et tous les points de BC à AB ou à AC (A VII) ; mais, à moins que l'un des ensembles AC et BC ne contienne pas plus d'un point, deux des quatre combinaisons ainsi définies sont à écarter (A IV), parce qu'elles auraient pour conséquence que tous les points de AC ou tous les points de BC appartiendraient à la fois aux trois ensembles. Les deux seuls cas admissibles sont donc caractérisés par les formules

$$AC \leqq AB \text{ et } BC \leqq AB$$

ou

$$AC = CB$$



Mais, si C n'appartenait pas à AB, on devrait avoir aussi (A VII) : AB $\leqq$ AC ou $\leqq$ BC, relations incompatibles toutes les deux avec les précédentes pour le motif déjà invoqué ; A I doit donc bien être satisfait, toujours sous la réserve signalée pour les démonstrations des propositions 1 et 3 complétées par 3 et 6:

On reconnaîtra facilement que des propositions 8 et 9 résulte la proposition suivante :

10. *Sont équivalents les groupes de propositions* (A I, A II, A III) *et* (A II, A III, A VII) *ainsi que ceux que l'on obtient en y effectuant les substitutions dont la validité résulte de la proposition* 7.

Sans insister davantage sur les questions d'équivalence logique, je me bornerai maintenant à signaler l'identité des axiomes A I et II réunis et de l'axiome d'ordre II 3 adopté par M. Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie* et enfin à établir que le second axiome d'ordre adopté par ce savant dans la première édition de cet ouvrage (axiome II 4, p. 9) et qui figure comme théorème[1] dans

[1] M. Hilbert indique dans un renvoi que cette proposition a été reconnue par M. H. Moore (Transactions of the American Mathematical Society, 1902) comme étant une conséquence de certains axiomes planaires.

la troisième édition (théorème 4 du chapitre I, p. 6), peut être déduit des propositions de l'un quelconque des groupes qui font l'objet de la proposition 10; il est d'ailleurs licite d'invoquer toutes les propositions, car chacune d'elles est une conséquence de chacun des groupes.

Axiome de M. Hilbert. — *Quatre points quelconques* A, B, C, D *d'une droite peuvent toujours être désignés d'une manière telle que* B *soit situé entre* A *et* C *et aussi entre* A *et* D, *et que* C *soit situé entre* A *et* D *et aussi entre* B *et* D.

Parmi les points A, B et C, il y en a toujours un, par exemple B, qui appartient à l'un des segments (arcs) définis par les deux autres (A I), soit AC, et, si D est un quatrième point quelconque, il appartient à deux des segments (arcs) définis par les trois autres points ou n'appartient à aucun (A III).

Dans le second de ces cas, puisque D n'appartient pas à AC, l'un des points A et C, par exemple C, doit appartenir au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces points et par D (A I), soit AD, et, comme d'autre part B appartient à AC (hyp. initiale), C ne peut pas appartenir à AB (A II) et, appartenant déjà à AD, il doit donc appartenir aussi à BD (A III), ce qui était bien la dernière des propriétés à démontrer.

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque D appartient à deux segments (arcs) définis par A, B, C, par exemple à AC et à BC, il ne peut appartenir au troisième (A VI), soit à AB, et A, ne pouvant alors appartenir ni à BC ni à CD (A II), ne peut non plus appartenir à BD (A III) ; en outre, C n'appartenant pas à AB, B doit appartenir à AD (A I). L'axiome de M. Hilbert est donc encore satisfait moyennant une interversion des rôles des points C et D.

11. *Des portions d'un ensemble* L *qui possèdent les propriétés exprimées par les propositions* A, AO *et celles de l'un des groupes qui font l'objet de la proposition* 10, *permettent toujours de définir un ordre linéaire ouvert pour les points de* L.

Lemme. *Si* A *est un point distinct des deux points* C *et* D *et qui n'appartient pas à* CD, *parmi les deux ensembles* AC *et* AD, *il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

En effet, parmi les deux points C et D, il y en a toujours un, par exemple C, qui appartient au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces deux points et par A (A I), soit à AD, et alors AC sera bien une portion de AD (lemme de 5).

Deux points A et B étant donnés, L peut évidemment être décomposé en deux ensembles partiels dont l'un est formé des points tels que le segment (l'arc) déterminé par chacun d'eux avec B contienne A[1], le second ensemble étant formé des autres points, y

[1] Cet ensemble partiel s'identifie, dans le cas des segments avec S (A), et dans le cas des arcs avec A (A).

compris B. Si C et D désignent deux points quelconques appartenant à un même ensemble partiel, A, qui, par hypothèse appartient à la fois à BC et à BD ou n'appartient ni à l'un ni à l'autre de ces deux ensembles, ne doit pas appartenir à CD (A IV et A III) et, par suite, l'un des ensembles AC et AD devra être une portion de l'autre (lemme). On pourra donc, en égard aux axiomes B I et B II (p. 281) relatifs aux segments (arcs) initiaux, définir un ordre linéaire ouvert pour tous les points au moyen des conventions suivantes :

1° Si C et D sont deux points distincts l'un de l'autre et de A et qui appartiennent au même ensemble partiel, C précède D lorsqu'on a, pour tous les points du premier ensemble (AC contient B) AD < AC, et pour les points du second ensemble (AC ne contient pas B), AC < AD.

2° Tous les points du premier ensemble partiel précèdent tous ceux du second.

3° A est le premier point du second ensemble (cas des segments) ou le dernier point du premier (cas des arcs).

III

On appellera *ensemble connexe* l'ensemble des points compris entre deux coupures consécutives d'un ensemble ordonné linéairement L, une coupure étant, comme on sait, définie par une décomposition de L en deux portions sans point commun dont l'une est un ensemble initial (Cf. § I).

On reconnaîtra facilement les propriétés suivantes :

". *Un ensemble connexe contient toujours au moins deux points.*

I. *Si des ensembles connexes, en nombre fini ou transfini, ont au moins un point commun, l'ensemble de leurs points est connexe.*

II. *Si des ensembles connexes, en nombre fini ou transfini, ont une partie commune qui ne se réduit pas à un point, celle-ci est connexe.*

Parmi trois points quelconques distincts l'un de l'autre

III. *chacun appartient toujours à un ensemble connexe au moins qui contient l'un des deux autres points et ne contient pas le troisième*

IV. *et il n'y a jamais plus d'un point appartenant à deux ensembles connexes dont chacun contient respectivement l'un des deux autres points et ne contient pas le troisième.*

On va maintenant établir que, réciproquement, des portions d'un ensemble L qui possèdent ces propriétés, permettent toujours de définir un ordre linéaire ouvert pour tous les éléments de L, éléments que, selon la convention adoptée, on continuera à appeler points.

1. *Il existe toujours un ensemble connexe qui contient deux points distincts quelconques donnés.*

En effet, A et B désignant les deux points, si C est un troisième point arbitrairement choisi et s'il existe un ensemble connexe contenant à la fois A et B, et ne contenant pas C, la proposition sera par cela même satisfaite; dans le cas contraire, il existera toujours (III) un ensemble connexe contenant A et C sans contenir B, et un autre contenant B et C sans contenir A. L'ensemble des points de ces deux ensembles connexes, qui ont au moins en commun le point C est connexe (I) et contient bien A et B.

A''. Définition. *Deux points distincts quelconques,* A *et* B *définissent toujours un et un seul ensemble de points appelé arc qui est la partie commune à tous les ensembles contenant à la fois ces deux points; ceux-ci seront dits les extrémités de l'arc, qui sera désigné par* AB *ou* BA.

La légitimité de cette définition résulte évidemment de la proposition 1.

Les propositions suivantes sont quasi-évidentes :

A 0. *Tout arc contient ses extrémités.*

2. *Tout arc est un ensemble connexe* (Cf. Ax. II).

3. *Pour qu'un ensemble de points soit connexe, il faut qu'il contienne tous les points de l'arc défini par deux quelconques de ses points et il suffit que cette condition soit réalisée pour un point déterminé et tout autre point de l'ensemble* (I, '' et 1).

4. *Tout arc contient tous les points de l'arc défini par deux quelconques de ses points* (0, 1 et 2).

5. *Tout ensemble connexe dont tous les points appartiennent à* AB *et qui contient* A *ne contient pas* B *ou est identique à* AB.

Il ne peut, en effet, exister aucun ensemble connexe contenant à la fois A et B et qui soit une portion de AB (3).

Parmi trois points distincts l'un de l'autre,

A I *il y en a toujours un*

A II *et un seulement qui appartient à l'arc défini par les deux autres.*

1° En effet, si A n'appartient pas à BC, c'est qu'il existe un ensemble connexe au moins qui contient B et C et ne contient pas A (A'') et, si B n'appartient pas à AC, il doit exister de même un ensemble connexe contenant A et C et ne contenant pas B. L'ensemble des points de ces deux ensembles connexes, qui ont au moins en commun le point C, est connexe (I) et contient à la fois A, B et C. Le point A, appartenant à un ensemble connexe contenant C et ne contenant pas B, ne peut appartenir à aucun ensemble connexe contenant B et ne contenant pas C (IV), de sorte que C doit appartenir à tous les ensembles connexes qui contiennent à la fois A et B et, par suite, à l'arc AB. La propriété A I est donc établie.

2° Si C appartient à AB, il appartient aussi à tous les ensembles qui contiennent A et B et, par suite l'axiome III exige qu'il existe toujours un ensemble connexe qui contienne A et C et ne contienne pas B et de même un ensemble connexe qui contienne B et C et ne contienne pas A; il en résulte bien que B ne peut pas appartenir à AC ni A à BC.

A III. *Trois points quelconques distincts l'un de l'autre étant donnés, tout point de l'un des trois arcs qu'ils définissent appartient toujours à l'un au moins des deux autres de ces arcs.*

En effet, l'ensemble des points des arcs AC et BC, par exemple, est connexe (2 et 1) et contient A et B (A0); il doit donc contenir tous les points de AB (3), de sorte que tout point de ce dernier ensemble doit bien appartenir à AC ou à BC.

Il résulte de là que les axiomes posés ont pour conséquence les propositions A″, A 0, A I, A II et A III et, par suite (prop. 11 du § II), permettent bien de définir un ordre linéaire pour tous les points de L.

Il est à remarquer enfin que l'axiome IV a été utilisé uniquement pour la démonstration de la proposition A I, de sorte que les propriétés A II et A III, équivalentes, comme on l'a vu, d'une part à A III, A V et A VI et d'autre part, à A III, A IV et A V, sont des conséquences de 0, I, II et III indépendamment de IV.

G. Combebiac (Limoges).