6e Démonstration.

αN et par X′ le point de rencontre de αN et de A′D, on a dans le triangle αIN

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{IN}}^2 &= \overline{\alpha \mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha \mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,(\mathrm{I'X'} \pm \alpha\mathrm{X'}) \\ &= \overline{\alpha \mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha \mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{I'X'} - 2\,.\,\alpha\mathrm{N}\,.\,\alpha\mathrm{X'} \\ &= \overline{\alpha \mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha \mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{IX} - \overline{\alpha \mathrm{A'}}^2 \,. \qquad (3)\end{aligned}$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \overline{\alpha \mathrm{N}}^2 + \overline{\mathrm{IX}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N}\,.\,\mathrm{IX} = (\alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX})^2 \,,$$

on a donc :

$$\mathrm{IN} = \alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX} \,,$$

ce qui montre que les deux cercles N, I se touchent.

Corollaire. — J est également distant des trois côtés du triangle A′ED.

6e Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5e démonstration, menons la droite passant par les points X et J. (Fig. 5.)

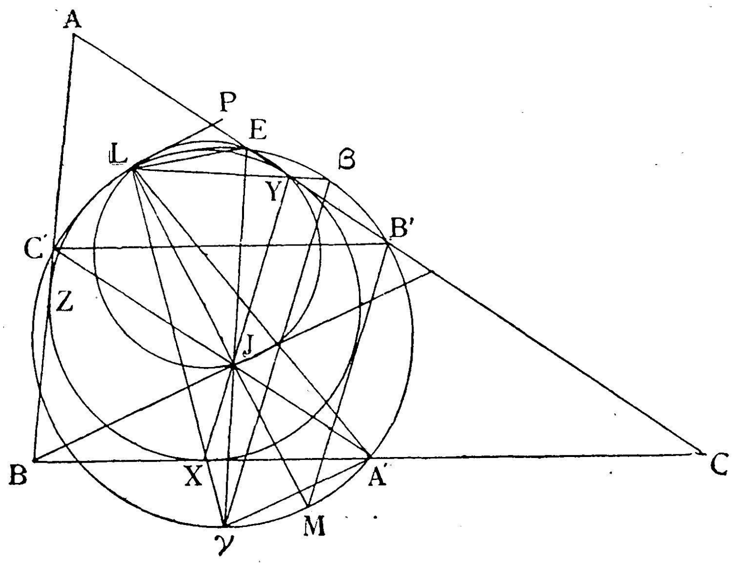

Fig. 5.

Puisque A′J et A′X sont égaux et que A′J et CY sont parallèles, les deux triangles A′XJ et CXY sont des triangles isocèles et équiangulaires ; donc XY et XJ coïncident entre eux.

Menons la droite qui passe par deux points α et X et qui rencontre de nouveau en L le cercle A′B′C′.

Les deux angles αLA′ et αA′X étant égaux, le cercle qui passe par les trois points A′, X, L touche la droite αA′ au point A′ ; donc

$$\alpha\mathrm{X}\,.\,\alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{A'}}^2 \,.$$

Mais $\alpha\mathrm{J} = \alpha\mathrm{A'}$ comme on a indiqué dans la 5e démonstration, donc :

$$\alpha\mathrm{X}\,.\,\alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{J}}^2 \,,$$

ce qui montre que la droite αJ touche le cercle passant par les trois points X, J, L et que par suite les deux angles αLJ, αJX sont égaux.

Si maintenant on mène par le point B′ deux droites respectivement parallèles aux deux droites XY et CB et coupant de nouveau le cercle A′B′C′ en M et C′, la droite XY faisant des angles égaux avec deux droites BC et AC, B′M divise en deux parties égales un des angles que font entre elles deux droites B′C′ et B′E ; donc l'arc C′M est la moitié de l'arc C′E. De plus, comme l'arc C′α est la moitié de l'arc C′B′, l'arc αM est égal à la moitié de l'arc B′E (si le cercle XYZ était le cercle inscrit, l'arc αM aurait le même sens que l'arc B′E intercepté par l'angle inscrit B′C′E, et si le même cercle était exinscrit, l'arc Mα aurait le même sens que l'arc B′A′C′).

Si donc on mène du point α la droite parallèle à la droite XY, cette droite passera par le milieu β de l'arc B′E.

Les deux angles αJX et EJY sont égaux ou supplémentaires suivant que le cercle XYZ était inscrit ou exinscrit.

Dans ce qui suit, je suppose, pour plus de commodité, que l'angle B soit plus grand que l'angle C si XYZ était le cercle inscrit et plus petit que C si ce cercle était exinscrit.

Or, l'angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant $\frac{1}{2}$ arc B′E $=$ arc αM suivant que ce cercle XYZ est inscrit ou exinscrit ; donc l'angle αLJ est égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc αM et par suite la droite LJ passe par le point M.

Donc :

$$2 \text{ droits} - \widehat{JLE} = \widehat{MBE} = \widehat{JYE}$$

et le quadrilatère EYJL est inscriptible.

Donc :

$$\widehat{ELY} = \widehat{EJY} = 2 \text{ droits} - \widehat{J\alpha\beta} .$$

Ce dernier angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant la moitié de l'arc B′E, suivant que le cercle XYZ est inscrit ou exinscrit ; donc la droite LY passe par le point β.

Les deux arcs αM et βE étant égaux, les deux arcs $\alpha\beta$ et ME seront aussi égaux, d'où :

$$\widehat{XLY} = \widehat{JLE} = 2 \text{ droits} - \widehat{XYE} ,$$

donc le point L est situé sur le cercle XYZ.

Si ensuite on mène au point L la tangente au cercle A′B′C′ et qu'on prenne sur cette tangente un point P de façon que les deux points P et α soient de part et d'autre de la droite $L\beta$, on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} ,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles A′B′C′ et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7e Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5e démonstration pour désigner les différents points de la figure ; de plus j'appelle J′ le point de rencontre des deux droites XY et αB′. (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

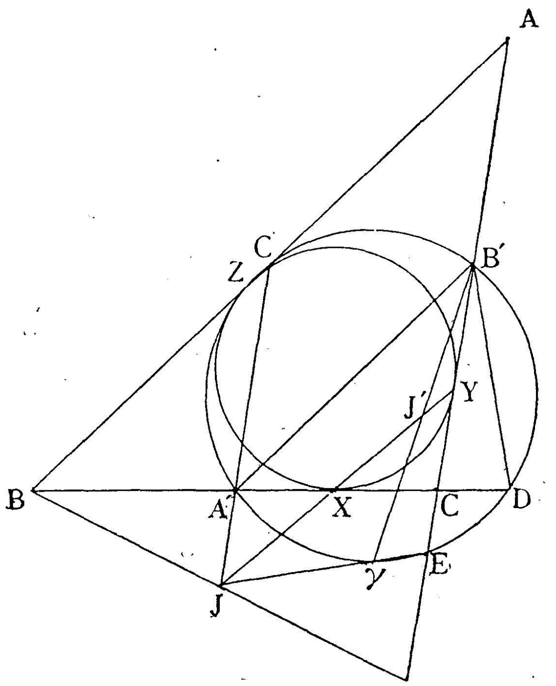

Fig. 6.

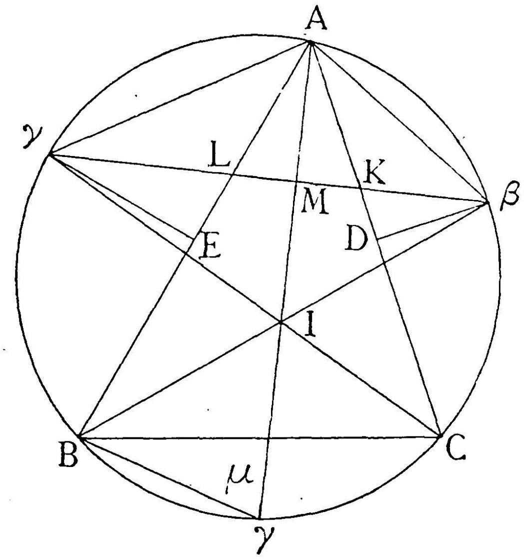

Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6e démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites αE et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc B′A′E si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc B′A′E si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E