7e Démonstration.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

points P et α soient de part et d'autre de la droite $L\beta$, on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} \,,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles A′B′C′ et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7ᵉ Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5ᵉ démonstration pour désigner les différents points de la figure ; de plus j'appelle J′ le point de rencontre des deux droites XY et αB′. (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

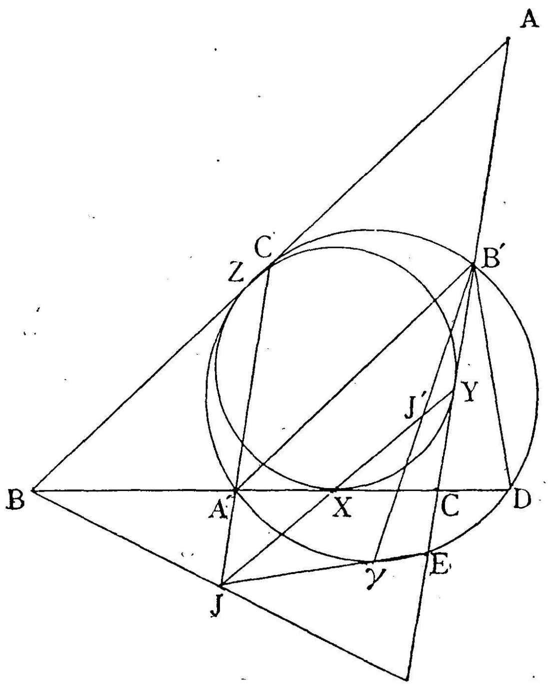

Fig. 6.

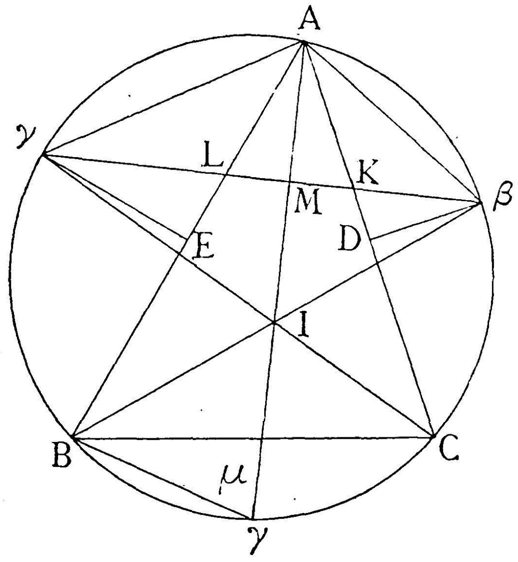

Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6ᵉ démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites αE et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc B′A′E si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc B′A′E si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle $A'B'C'$; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites αE et $\alpha B'$ sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6e démonstration, on pourra prouver que les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ se touchent entre eux.

8e Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par r et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient β, γ les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de β sur AC et de γ sur AB; et K, L, M les points de rencontre de $\beta\gamma$ avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites βA et γA étant respectivement égales aux droites βI et γI, la droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales; donc les deux triangles βAM et $A\gamma E$ sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles βDA et $AM\gamma$ donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire[1] :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \qquad \text{d'où} \qquad \beta D \,.\, \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \,.\, \gamma E = \overline{AI}^2 \tag{1}$$

[1] Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé Shiraishi Nagatada dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu.*