8e Démonstration.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.06.2024**

est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle A′B′C′ ; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites αE et αB′ sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6e démonstration, on pourra prouver que les deux cercles A′B′C′ et XYZ se touchent entre eux.

8e Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par r et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient β, γ les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de β sur AC et de γ sur AB ; et K, L, M les points de rencontre de $\beta\gamma$ avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites βA et γA étant respectivement égales aux droites βI et γI, la droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales ; donc les deux triangles βAM et AγE sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles βDA et AMγ donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire [1] :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \qquad \text{d'où} \qquad \beta D \cdot \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \cdot \gamma E = \overline{AI}^2 \qquad (1)$$

---

[1] Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé Shiraishi Nagatada dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu.*

Maintenant soit α le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement μ, μ', μ'' la distance de α à la corde BC et les distances βD et γE. D'après les résultats précédents :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = 4\Sigma\mu'\mu'' .$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma\mu^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma(\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4}a^2)$$

$$= \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu)^2 - 2R\Sigma\mu = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu - R)^2 - R^2 .$$

Mais, on a :

$$\Sigma\mu = 2R \mp r . \qquad (2)$$

D'où

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc [1] :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{2}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma\overline{AO}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 .$$

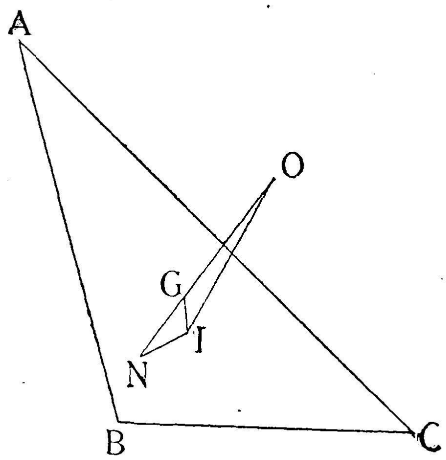

Fig. 8.

[1] Lorsque r représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7e édition, 1re partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de $\Sigma \mathrm{AI}^2$ l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{\mathrm{IG}}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r\ .$$

Donc :

$$2\overline{\mathrm{IN}}^2 + \mathrm{R}^2 \mp 2\mathrm{R}r = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r + \frac{3}{2}\mathrm{R}^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2\ .$$

D'où : $\overline{\mathrm{IN}}^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r\right)^2$, par suite $\mathrm{IN} = \frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r$.

Donc les deux cercles A′B′C′ et XYZ se touchent, c. q. f. d.

Corollaire. — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4\mathrm{R}r = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2\ .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma \mathrm{AI}^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2\ .$$

9ᵉ Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

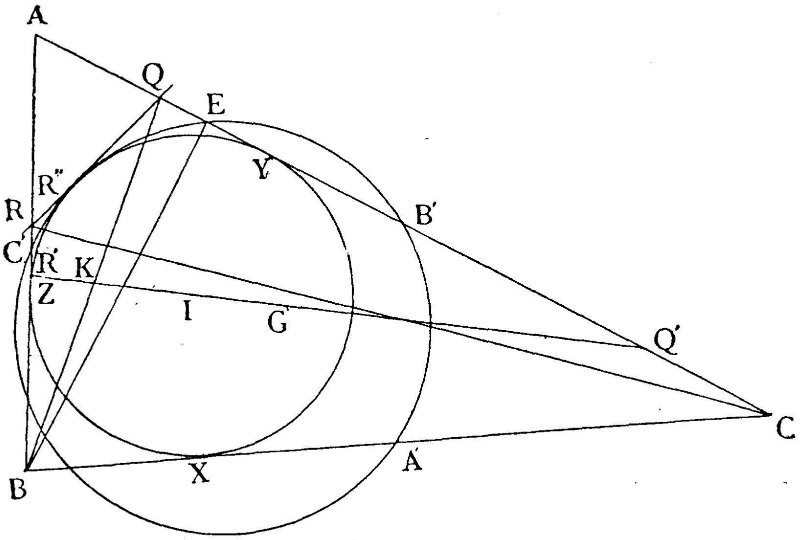

Fig. 9.

Représentons respectivement par a, b, c les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de