

# 8e Démonstration.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle A'B'C'; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites  $\alpha E$  et  $\alpha B'$  sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6<sup>e</sup> démonstration, on pourra prouver que les deux cercles A'B'C' et XYZ se touchent entre eux.

### 8<sup>e</sup> Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par  $a, b, c$  les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par  $r$  et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient  $\beta, \gamma$  les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de  $\beta$  sur AC et de  $\gamma$  sur AB; et K, L, M les points de rencontre de  $\beta\gamma$  avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites  $\beta A$  et  $\gamma A$  étant respectivement égales aux droites  $\beta I$  et  $\gamma I$ , la droite  $\beta\gamma$  est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales; donc les deux triangles  $\beta AM$  et  $A\gamma E$  sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles  $\beta DA$  et  $AM\gamma$  donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire <sup>1</sup> :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \quad \text{d'où} \quad \beta D \cdot \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \cdot \gamma E = \overline{AI}^2 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé SHIRAIISHI NAGATADA dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu*.

Maintenant soit  $\alpha$  le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement  $\mu, \mu', \mu''$  la distance de  $\alpha$  à la corde BC et les distances  $\beta D$  et  $\gamma E$ . D'après les résultats précédents :

$$\Sigma \overline{AI}^2 = 4 \Sigma \mu' \mu'' .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 &= (\Sigma \mu)^2 - \Sigma \mu^2 = (\Sigma \mu)^2 - \Sigma (\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4} a^2) \\ &= \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu)^2 - 2R \Sigma \mu = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu - R)^2 - R^2 . \end{aligned}$$

Mais, on a :

$$\Sigma \mu = 2R \mp r . \tag{2}$$

D'où

$$\frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc<sup>1</sup> :

$$\overline{AI}^2 = \frac{1}{2} \Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma \overline{AO}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 .$$

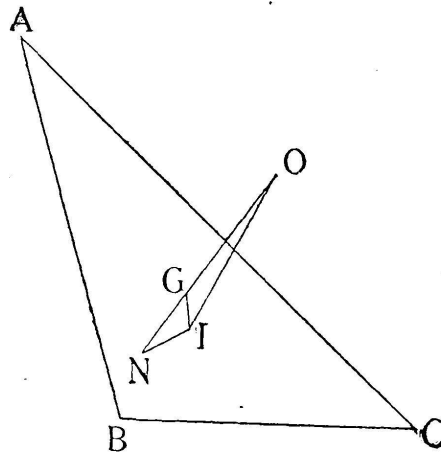


Fig. 8.

<sup>1</sup> Lorsque  $r$  représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7<sup>e</sup> édition, 1<sup>re</sup> partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de  $\Sigma AI^2$  l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{IG}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Donc :

$$2\overline{IN}^2 + R^2 \mp 2Rr = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où :  $\overline{IN}^2 = \left(\frac{1}{2}R \mp r\right)^2$ , par suite  $IN = \frac{1}{2}R \mp r$ .

Donc les deux cercles  $A'B'C'$  et  $XYZ$  se touchent, c. q. f. d.

*Corollaire.* — En considérant le cercle inscrit dans l'angle  $A$ , on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4Rr = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma AI^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

### 9<sup>e</sup> Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites  $AC$  et  $AB$  soient affectés de signes et soient  $AC, AB$  les sens positifs des segments.

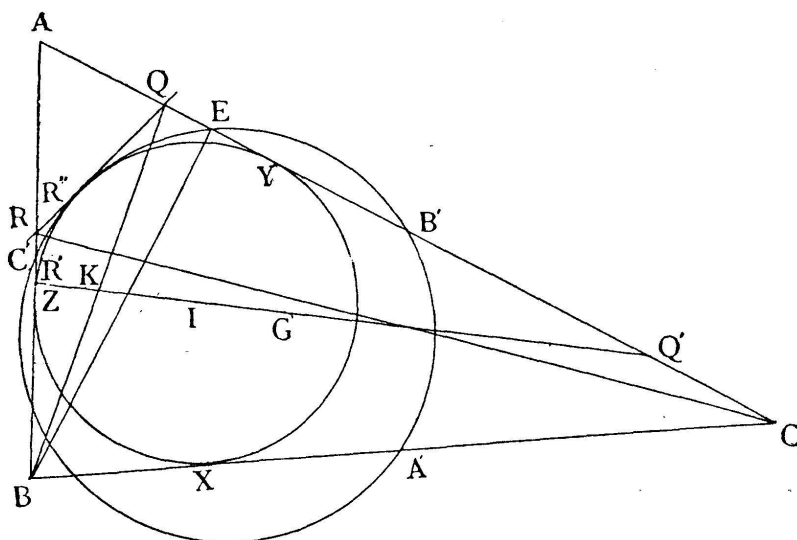


Fig. 9.

Représentons respectivement par  $a, b, c$  les trois côtés  $BC, AC$  et  $AB$  du triangle  $ABC$ ; soient  $E$  le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet  $B$  sur le côté opposé et,  $Q$  et  $R$  les points de