UN APPAREIL DÉMONTRANT LA TRANSFORMATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE EN ÉNERGIE CINÉTIQUE

1. Le mécanisme décrit dans les lignes suivantes a été imaginé pour démontrer d'une façon simple comment l'énergie potentielle peut être transformée directement en l'énergie cinétique d'une roue en rotation et inversement. Le problème théorique dont il est question, quoique d'ordre élémentaire, est cependant très instructif et peut être trouvé dans plus d'un ouvrage important de mécanique théorique[1]. Il ressemble à celui de la machine d'Atwood, avec la différence essentielle que dans notre mécanisme l'énergie cinétique est celle d'une masse tombante et en rotation au lieu d'une masse tombante seule. L'énergie de la masse rotative est utilisée pour soulever la même masse d'une partie de sa hauteur originale. Etant donné l'importance de la machine d'Atwood dans l'enseignement élémentaire, un appareil dont le caractère essentiel est de mettre en évidence les propriétés de l'énergie rotative semble également important et digne d'attention.

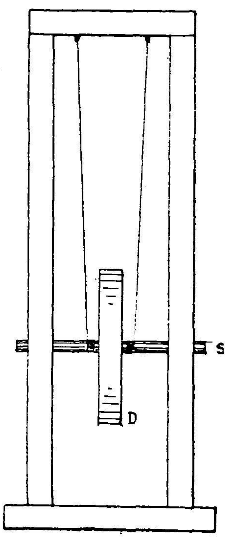

Fig. 1_a.

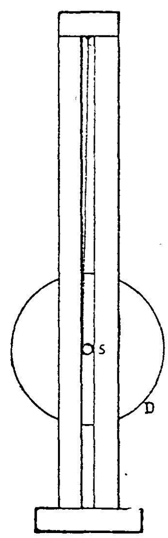

Fig. 1_b.

2. La partie principale de l'appareil consiste en un disque circulaire D, fixé sur un axe horizontal s passant par son centre et lui étant perpendiculaire. Le

[1] Voir par exemple E.-J. Routh, *Elementary rigid dynamics*, 6e éd., p. 220.

disque et l'axe sont suspendus à un cadre à l'aide d'une suspension bifilaire, comme le montrent les fig. 1_a et 1_b de face et de côté. Sur les côtés du cadre (fig. 1_b) est adaptée une échelle servant à mesurer les distances parcourues par le centre de l'axe.

L'expérience se fera de la manière suivante : On enroule les fils autour de l'axe d'une façon égale de chaque côté du disque et aussi haut que le cadre le permet. On abandonne alors l'appareil à lui-même; grâce à leur poids, le disque et l'axe commencent à descendre lentement; les fils se déroulent et obligent le disque à tourner autour de son axe aussi rapidement que les fils se détortillent. Cette descente se continue aussi longtemps que la longueur des fils le permet. Si l et G représentent la longueur du fil déroulé et le poids du disque et de l'axe, l'énergie potentielle avant le mouvement est $P = Gl$. Cette énergie est transformée actuellement en l'énergie cinétique K de la masse tournante et l'énergie V due à la vitesse acquise de chute. Par conséquent

$$P = K + V . \tag{1}$$

L'énergie V est compensée par la réaction du cadre[1]. L'énergie cinétique utile du disque et de l'axe est alors

$$K = P - V . \tag{2}$$

En vertu de cette énergie le disque continue à tourner et les fils s'enroulent de nouveau autour de l'axe (cette fois évidemment sans l'intervention de l'expérimentateur). Le mouvement ascensionnel cessera dès que toute l'énergie (2) aura été utilisée. Cette énergie est ainsi transformée en l'énergie potentielle $P_1 = P - V$. Comme $P_1 < P$, il est clair que le mouvement ascensionnel n'atteindra pas la hauteur primitive. Le même processus de mouvement de chute et d'ascension se continuera de lui-même un nombre infini de fois. Chaque fois que le disque atteint le point le plus bas, une partie de l'énergie restante est compensée par le cadre,

[1] Pour plus de simplicité on néglige tout frottement.

c'est pourquoi chaque ascension est moins élevée que la précédente.

En désignant par V, V_1, V_2, ... les valeurs de ces pertes successives d'énergie au point le plus bas, on aura

$$P = V + V_1 + V_2 + \dots \quad \text{ad inf.}$$

3. Afin de calculer les diverses quantités qui interviennent dans ce mouvement quasi périodique, désignons par R et r les rayons du disque et de l'axe, s la longueur du fil déroulé après t secondes et I le moment d'inertie de la masse mobile, abstraction faite des fils. Soit en outre Φ l'angle dont a tourné le disque au bout de t secondes, l'énergie cinétique accumulée dans le disque et l'axe en rotation sera alors

$$K = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 . \tag{3}$$

Mais, comme la longueur s du fil déroulé sur l'axe est $s = r\Phi$, on aura $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}$ et

$$K = \frac{I}{2r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \tag{4}$$

Le travail effectué au bout de t secondes sera

$$P = G \, . \, s \tag{5}$$

et l'énergie due au mouvement de chute

$$V = \frac{G}{2g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 , \tag{6}$$

où g est la constante de la gravitation.

Par suite, en tenant compte de (1), nous aurons l'équation différentielle

$$Gs = \frac{I}{2r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{G}{2g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \tag{7}$$

Résolvant, nous obtenons

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2r^2 gG}{gI + r^2 G}} \cdot \sqrt{s} \tag{8}$$

et

$$s = \frac{1}{2} \frac{r^2 g G}{g I + r^2 G} t^2 . \tag{9}$$

Comme l est la longueur totale du fil enroulé, le temps T au bout duquel le disque atteint sa position la plus basse s'obtiendra par

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 g G}{g I + r^2 G} T^2 ,$$

$$T = \sqrt{\frac{2l(gI + r^2 G)}{r^2 g G}} . \tag{10}$$

Au bout de ce temps, d'après (8)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2r^2 g G l}{g I + r^2 G}$$

et, d'après (6)

$$V = \frac{r^2 G^2 l}{g I + r^2 G} . \tag{11}$$

Par conséquent, au bout de T secondes,

$$K = Gl - \frac{r^2 G^2 l}{g I + r^2 G} ,$$

ou

$$K = \frac{g G I l}{g I + r^2 G} . \tag{12}$$

Cette énergie est utilisée à soulever le disque et l'axe d'une certaine hauteur l_1, de sorte que

$$l_1 G = \frac{g G I l}{g I + r^2 G} \qquad \text{et} \qquad l_1 = \frac{g I l}{g I + r^2 G} . \tag{13}$$

D'après cela, on voit que la longueur du deuxième cycle du mouvement s'obtient en multipliant la longueur précédente par le facteur $\frac{gI}{gI + r^2 G}$. Par suite, pour le $n^{\text{ème}}$ cycle ou pulsation, la longueur parcourue par le centre de la masse mobile sera

$$l_n = \left(\frac{g I}{g I + r^2 G}\right)^n l . \tag{14}$$

On voit clairement que $\lim\limits_{n=\infty} (l_n) = 0$.

L'énergie perdue lors de cette pulsation au point le plus bas sera, en tenant compte de (11),

$$V_n = \frac{r^2 G^2 l_n}{gI + r^2 G}\,, \qquad \text{ou} \qquad V_n = \frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l\,. \tag{15}$$

En effectuant la somme $\frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l$, on trouve facilement qu'elle vaut $Gl = P$, comme on l'a indiqué précédemment.

Il serait facile de s'arranger à pouvoir fixer d'autres disques de différentes masses sur l'axe, ce qui modifierait le moment d'inertie I. On pourra étudier de cette façon l'influence de la masse sur les diverses énergies et les relations qui existent entre elles.

Arn. EMCH (University of Illinois).

(Traduction de J.-P. DUMUR, Genève.)

SUR LA REPRÉSENTATION DES DÉTERMINANTS PAR DES SYSTÈMES ARTICULÉS

1. — A propos du calcul des déterminants. — Le calcul numérique d'un déterminant est en général une opération fort laborieuse, dès que l'ordre du déterminant est un peu élevé. On s'en aperçoit notamment dans le cas assez rare où l'on a à résoudre un système d'équations du premier degré, et où il n'est pas possible de simplifier au préalable celui-ci. On sait qu'une racine est donnée par le quotient de deux déterminants identiques, à une colonne près ; or on est obligé néanmoins de développer intégralement chacun des deux déterminants. Nous nous étions demandé, il y a dix ans environ, à propos du calcul d'une voûte par la méthode de l'arc élastique qui conduit à la résolution d'un système