SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DE DROITES

Autor(en): **Turrière, É.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13540

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DE DROITES

Dans mes recherches sur le problème de TRANSON, j'ai été amené à attribuer une importance particulière à la projection orthogonale d'un point fixe O sur chaque rayon d'une congruence ou d'un complexe de droites. Une représentation des congruences dans laquelle on fait jouer un rôle à la projection d'un point O sur chaque rayon se rattache d'ailleurs à la représentation la plus générale d'une congruence de droites par RIBAUCOUR : étant donnée, en effet, une surface (S), RIBAUCOUR associe à chaque point M de cette surface une droite parallèle à la normale à (S) en M et introduit les paramètres qui déterminent la trace de la droite sur le plan tangent à (S) en M ; en supposant la surface (S) réduite à une sphère de rayon nul, on est ainsi amené à envisager la projection d'un point fixe.

Soient p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 les six coordonnées plückériennes d'une droite appartenant à une congruence ; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection P de l'origine O des axes rectangulaires $Oxyz$. Je poserai

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{v+u}{uv+1}, \\ p_2 &= i\,\frac{v-u}{uv+1}, \\ p_3 &= \frac{uv-1}{uv+1}, \end{aligned} \right.$$

ce qui revient à prendre pour paramètres ceux qui déterminent les génératrices rectilignes de la sphère de centre O et de rayon un. Il résulte de ces expressions (1) des relations remarquables et dont l'emploi est fréquemment avantageux.

Par dérivations partielles des fonctions p_1, p_2, p_3, il vient :

$$(1+uv)^2\frac{\partial p_1}{\partial u}=1-v^2\,,\quad (1+uv)^2\frac{\partial p_2}{\partial u}=-i(1+v^2)\,,\quad (1+uv)^2\frac{\partial p_3}{\partial u}=2v\;;$$

$$(1+uv)^2\frac{\partial p_1}{\partial v}=1-u^2\,,\quad (1+uv)^2\frac{\partial p_2}{\partial v}=i(1+u^2)\,,\quad (1+uv)^2\frac{\partial p_3}{\partial v}=2u\;;$$

de ces relations résultent les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial u}\right)^2=0\,,\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial v}\right)^2=0\,;\\ &\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=3}\frac{\partial p_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}=\frac{2}{(1+uv)^2}\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_3\frac{\partial p_2}{\partial u}-p_2\frac{\partial p_3}{\partial u}=i\frac{\partial p_1}{\partial u}\,,\qquad p_3\frac{\partial p_2}{\partial v}-p_2\frac{\partial p_3}{\partial v}=-i\frac{\partial p_1}{\partial v}\,,\\ &p_1\frac{\partial p_3}{\partial u}-p_3\frac{\partial p_1}{\partial u}=i\frac{\partial p_2}{\partial u}\,,\qquad p_1\frac{\partial p_3}{\partial v}-p_3\frac{\partial p_1}{\partial v}=-i\frac{\partial p_2}{\partial v}\,,\\ &p_2\frac{\partial p_1}{\partial u}-p_1\frac{\partial p_2}{\partial u}=i\frac{\partial p_3}{\partial u}\,,\qquad p_2\frac{\partial p_1}{\partial v}-p_1\frac{\partial p_2}{\partial v}=-i\frac{\partial p_3}{\partial v}\,.\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{D}(p_2\,,\,p_3)}{\mathrm{D}(u\,,\,v)}=\frac{-2ip_1}{(1+uv)^2}\,,\qquad \text{etc.}$$

Il existe de même des identités remarquables entre les dérivées du second ordre. Toutes ces relations sont d'ailleurs des cas particuliers de celles que l'on rencontre à propos de l'étude de la représentation sphérique générale des surfaces et des congruences de droites.

De l'expression précédente (4) du déterminant fonctionnel de deux des fonctions p_1, p_2, p_3, il résulte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_4 & \dfrac{\partial p_1}{\partial u} & \dfrac{\partial p_1}{\partial v}\\[2ex] p_5 & \dfrac{\partial p_2}{\partial u} & \dfrac{\partial p_2}{\partial v}\\[2ex] p_6 & \dfrac{\partial p_3}{\partial u} & \dfrac{\partial p_3}{\partial v}\end{vmatrix}$$

est nul ; je poserai donc

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} p_4 &= \frac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial v} - q\frac{\partial p_1}{\partial u}\right), \\ p_5 &= \frac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_2}{\partial v} - q\frac{\partial p_2}{\partial v}\right), \\ p_6 &= \frac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_3}{\partial v} - q\frac{\partial p_3}{\partial v}\right) ; \end{aligned}\right.$$

dans ces formules, p et q sont deux fonctions absolument quelconques de u et de v définies, lorsque les coordonnées plückériennes sont données, par les relations :

$$(6)\qquad \begin{aligned} p &= -iSp_4\frac{\partial p_1}{\partial u}, \\ q &= iSp_4\frac{\partial p_1}{\partial v} ; \end{aligned}$$

les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la projection P de O deviennent alors :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= p_3p_5 - p_2p_6 = \frac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial v} + q\frac{\partial p_1}{\partial u}\right), \\ y_0 &= p_1p_6 - p_3p_4 = \frac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_2}{\partial v} + q\frac{\partial p_2}{\partial u}\right), \\ z_0 &= p_2p_4 - p_1p_5 = \frac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_3}{\partial v} + q\frac{\partial p_3}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

La comparaison des expressions (4) des moments p_4, p_5, p_6 et des expressions (7) des coordonnées de la projection P de O m'avait conduit à étudier une certaine transformation de droites à laquelle j'ai consacré un premier article dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1909, p. 249). Les articles *Sur les surfaces de M. Appell* (1910, p. 145) et *Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale* (1911, p. 165) concernent des applications de la même transformation de droites ; j'ai montré que, dans cette transformation, les seules congruences de normales qui conservent leur propriété d'être normales à des surfaces sont les congruences de normales aux surfaces de M. APPELL ; toute autre congruence de normales est transformée en une congruence de droites qui admet un point pour surface centrale; cette remarque permet de déterminer toutes les congruences qui jouissent de cette dernière propriété et de les définir géométriquement. L'une de ces congruences est constituée par les génératrices des quadriques du système de LAMÉ découvert par M. G. HUMBERT : cette remarque a été faite par M. E. KERAVAL dans un Mémoire *Sur les surfaces partiellement cylindroïdes* (*Nouvelles Annales,* 1910, p. 529) et — ainsi que je m'en suis aperçu depuis la publication de mon troisième article — par M. J. HAAG dans son récent Mémoire *Sur certains mouvements remarquables et leurs applications* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1910, p. 357).

Les résultats auxquels j'ai consacré les articles cités sont susceptibles d'être généralisés : les formules (5) permettent d'étudier les transformations de droites avec conservation de la direction et d'attacher à toute transformation de cette nature une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, particulièrement simple, et qui représente les congruences de normales qui restent invariantes.

La propriété fondamentale est celle des fonctions p et q lorsque la congruence représentée par les formules (5) est une congruence de normales : la *condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit une congruence de normales est que les fonctions* p *et* q *soient les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à* u *et à* v *respectivement.* Cette propriété découle immédiatement des expressions des coordonnées plückériennes de la normale, en un point quelconque, à une surface quelconque définie comme enveloppe du plan d'équation

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi(u, v) ;$$

il est possible aussi de la rattacher, au moyen des formules (7), à la relation générale

$$\frac{\partial(x_0, p_1)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(y_0, p_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(z_0, p_3)}{\partial(u, v)} = 0$$

qui caractérise les congruences de normales.

Étant donnée une droite définie par u, v, p et q, si on pose

$$F(p, q, p', q') = 0, \quad G(p, q, p', q') = 0,$$

F et G étant deux fonctions quelconques des quatre variables p, q, p', q', on établit ainsi une certaine correspondance entre les droites (u, v, p, q) et (u, v, p', q'). Si en outre on suppose p et q fonctions de (u, v), les formules précédentes définissent p' et q' comme fonctions de (u, v) et par conséquent établissent une correspondance entre deux congruences de droites. Cette correspondance entre congruences se fait au moyen d'une transformation de droites, avec conservation de la direction ; les formules $F = 0$ et $G = 0$ étant données, la transformation géométrique est parfaitement définie et est indépendante de la considération des congruences (p, q) ou (p', q').

Je me propose de déterminer celles des congruences (p, q) et (p', q') qui sont simultanément des congruences de normales. Il suffit d'écrire que, p' et q' étant les dérivées d'une même fonction, il en est de même de p et q. La condition de compatibilité

$$(F, G) = 0$$

conduit au résultat suivant : la *fonction* ϖ, *dont* p *et* q *sont les dérivées partielles, est l'intégrale générale d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du second ordre et qui est invariante dans la dilatation infinitésimale ;* il en est de même de la fonction ϖ' dont p' et q' sont les dérivées. A toute correspondance $F = 0$, $G = 0$ est ainsi associée une équation du second ordre unique si la correspondance est réciproque ; sinon on doit associer deux équations définissant respectivement ϖ et ϖ'.

Si, en particulier, les formules $F = 0$ et $G = 0$ sont supposées résolues par rapport à p' et q', par exemple, c'est-à-dire si l'on pose

$$(8) \qquad \begin{cases} p' = P(p, q), \\ q' = Q(p, q), \end{cases}$$

l'équation définissant ϖ est l'équation

$$(9) \qquad r\frac{\partial Q}{\partial p} + s\left(\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p}\right) - t\frac{\partial P}{\partial q} = 0 .$$

Plus particulièrement encore, supposons que la correspondance s'établisse par une transformation de droites définies par les formules :

$$p' = \text{fonction de } p ,$$
$$q' = \text{fonction de } q ;$$

l'équation devient alors

$$\left(\frac{dQ}{dq} - \frac{dP}{dp}\right)s = 0 .$$

Si l'on a

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{dP}{dp}$$

c'est-à-dire

$$p' = ap + a_1 , \qquad q' = ap + a_2 ,$$

la transformation est une homothétie conservant toutes les congruences de normales. Sinon les seules congruences de normales qui conservent leur propriété sont définies par l'équation

$$s = 0 ,$$

qui caractérise les congruences de normales aux surfaces de M. Appell. Ce théorème généralise celui que j'avais antérieurement établi relativement à la transformation de droites

$$p' = -ip , \qquad q' = iq ,$$

dont le produit par une symétrie par rapport au point O est précisément la transformation de droites précédemment étudiée.

Étant donnée une équation linéaire et homogène du second ordre

$$(10) \qquad Hr + 2Ks + Lt = 0 ,$$

dans laquelle H, K, L sont des fonctions de p et de q, on peut se proposer de déterminer toutes les transformations (8)

$$(8) \qquad p' = P(p , q) \qquad q' = Q(p , q)$$

auxquelles cette équation est attachée. λ et μ étant deux fonctions auxiliaires de p et de q, on devra avoir, d'après la forme de (9),

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= \lambda H \quad , & \frac{\partial P}{\partial p} &= \mu - \lambda K \ , \\ \frac{\partial Q}{\partial q} &= \mu + \lambda K \ , & \frac{\partial P}{\partial q} &= - \lambda L \quad ; \end{aligned} \right.$$

d'où il résulte tout d'abord deux relations définissant les dérivées de μ :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial q}(\lambda H) - \frac{\partial}{\partial p}(\lambda K) \ , \\ \frac{\partial \mu}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}(\lambda K) - \frac{\partial}{\partial p}(\lambda L) \ , \end{aligned} \right.$$

et finalement une équation linéaire du second ordre définissant λ :

$$(13) \qquad \frac{\partial^2(\lambda L)}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2(\lambda K)}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2(\lambda H)}{\partial q^2} = 0 \ ;$$

les fonctions H, K, L de p, q étant données, on intégrera d'abord l'équation (13) ; soit λ une intégrale ; les formules (12) permettront de calculer μ ; les formules (11) donneront ensuite les fonctions cherchées P et Q.

Comme premier exemple, on peut prendre l'équation des surfaces de M. Appell

$$s = 0 \ ,$$

et l'on est conduit à prendre pour P une fonction arbitraire de p, et pour Q une fonction arbitraire de q.

Comme second exemple, soit l'équation de Laplace,

$$\Delta \varpi = r + t = 0 \ ;$$

l'équation (13) est elle-même l'équation de Laplace $\Delta\lambda = 0$: on doit alors prendre pour $P + iQ$ une fonction arbitraire de $p + iq$ et pour $P - iQ$ une autre fonction également arbitraire de $p - iq$.

É. Turrière (Alençon).