SUR LA THÉORIE DES CONIQUES

Autor(en): **Valiron, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13541

SUR LA THÉORIE DES CONIQUES

1. — Depuis l'introduction de l'étude des sections planes des cônes à base circulaire au programme de géométrie descriptive de la classe de Mathématiques en France, deux auteurs se sont proposés de simplifier la démonstration du théorème suivant : *la perspective d'un cercle est une conique.*

La démonstration donnée par M. HADAMARD[1] (*N. A.*, avril 1905) s'appuie sur le théorème de Dandelin. Celle de M. REBEIX (*N. A.*, mars 1910) a l'inconvénient, au point de vue de l'enseignement, de s'appuyer sur une définition tangentielle des coniques. Je donne ici une démonstration très élémentaire, ne supposant pas connue la notion de rapport anharmonique; j'indique ensuite comment, en supposant connue cette notion, on pourrait abréger les démonstrations.

I. — **Méthode élémentaire**[2].

2. — Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME I. A *et* A' *étant deux points diamétralement opposés d'une ellipse ou d'une hyperbole,* AT *et* A'T' *les tangentes en ces points :* 1° *La tangente en un point variable* M *coupe ces deux tangentes aux points* P *et* P' *tels que le produit* $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'}$ *est constant;* 2° *le point* M *partage le segment* P, P' *dans le rapport de* $-\overline{AP}$ *à* $\overline{A'P'}$; 3° *la droite* A'M *coupe* AT *au point* Q, AM *coupe* A'T' *en* Q' *tels que* $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AP}$, $\overline{A'Q'} = 2\overline{A'P'}$, *par suite* $\overline{AQ} \times \overline{A'Q'} = C^{te}$.

---

[1] M. Hadamard a repris la question, par une méthode plus simple, dans la nouvelle édition de son traité de Géométrie.

[2] Cette exposition est, à peu de choses près, le résumé d'une leçon faite à mes élèves de Mathématiques spéciales préparatoires en décembre 1909.

Considérons par exemple le cas de l'ellipse, soit (fig. 1) F l'un des foyers, FX la parallèle aux tangentes AT, A'T' menée par F. D'après le théorème de Poncelet, nous avons $\widehat{AFP} = \widehat{PFM}$, et $\widehat{MFP'} = \widehat{P'FA'}$, l'angle $\widehat{PFP'}$ est donc égal

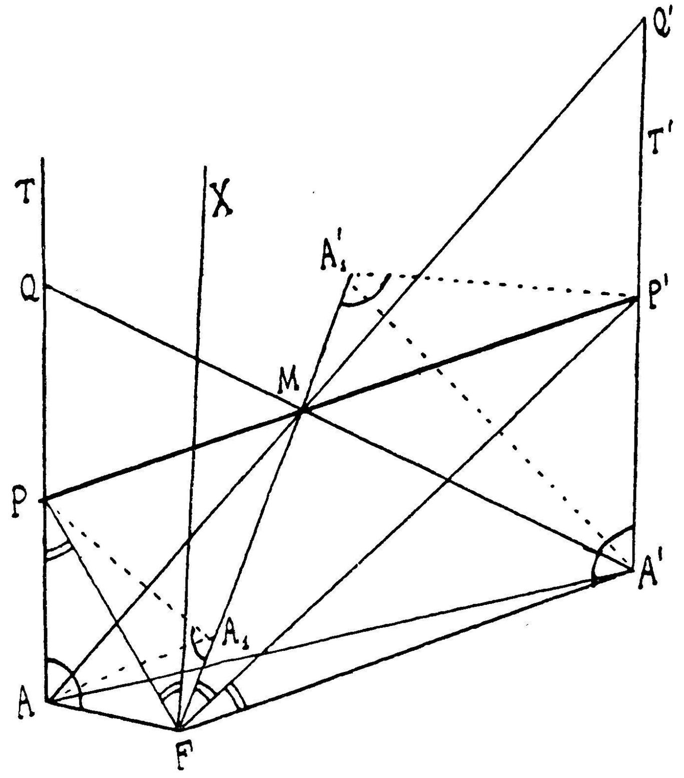

Fig. 1.

à la moitié de $\widehat{AFA'}$, et par suite égal à $\widehat{XFA'}$. Nous déduisons de là l'égalité des angles $\widehat{PFX}$ et $\widehat{P'FA'}$, ou

$$\widehat{APF} = \widehat{P'FA'} \; ,$$

les deux triangles APF, A'FP' sont donc semblables (les angles A et A' étant évidemment égaux), d'où il suit

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = AF \cdot A'F$$

(dans le cas de l'hyperbole on aurait $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = - AF \cdot A'F$) ce qui démontre la première partie.

Le symétrique A_1 de A par rapport à la droite PF est sur FM, de même le symétrique A'_1 de A_1 par rapport à FP' est sur la droite FM, et de plus l'égalité des angles $\widehat{PAF}$ et $\widehat{P'A'F}$ entraîne celle de $\widehat{PA_1F}$ et $\widehat{P'A'_1F}$, par suite

$$\pm \frac{PA_1}{P'A'_1} = \frac{\overline{PM}}{\overline{P'M}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}},$$

(dans le premier rapport on a le signe — pour l'ellipse, + pour l'hyperbole), la deuxième partie est donc démontrée.

Enfin Q étant le point d'intersection de MA′ avec AT, nous avons

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{A'P'}} = -\frac{\overline{PM}}{\overline{P'M}} = +\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}},$$

d'où

$$\overline{PQ} = \overline{AP}.$$

De même

$$\overline{P'Q'} = \overline{A'P'},$$

d'où il suit la troisième partie.

3. — *Conséquences et réciproque dans le cas de l'ellipse.* — Prenons pour AA′ le grand axe de l'ellipse, si $2b$ désigne la grandeur du petit axe, on voit (en plaçant M en l'un des sommets de ce petit axe) que l'on a :

$$\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'} = 4b^2.$$

Si M_1 est le point du cercle principal ayant la même projection R sur AA′ (et situé du même côté de AA′); $A'M_1$ coupera AQ en Q_1; AM_1 coupe A′Q en Q'_1 et l'on a

$$\overline{AQ_1} \cdot \overline{A'Q'_1} = 4a^2$$

puisque l'angle AM_1A' est droit. Mais on a par des triangles semblables évidents

$$\overline{AQ_1} = \overline{AQ} \cdot \frac{M_1R}{MR}, \qquad \overline{A'Q'_1} = \overline{A'Q'}\,\frac{M_1R}{MR},$$

par suite la comparaison des deux égalités précédentes donne

$$\frac{M_1R}{MR} = \frac{a}{b}.$$

Nous obtenons donc le résultat connu :

L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle.

On déduira alors de là la construction d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués[1], ce qui nous permet de démontrer la réciproque du théorème I.

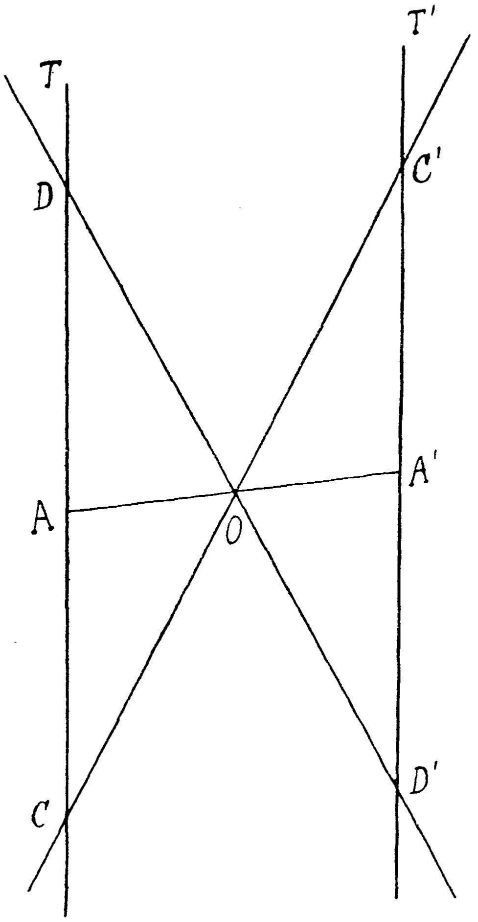

Fig. 2.

Théorème II_1. *Etant données deux parallèles* T, T′, *menées par deux points* A, A′ ; *le lieu des points* M, *tels que le produit* $\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'}$ *des segments interceptés sur* T *et* T′ *par les droites* A′M, AM, *est constant et égal à* $4b^2$, *est l'ellipse ayant pour diamètres conjugués* AA′ *et la parallèle aux droites* T, T′ *de longueur* $2b$.

Il y a en effet identification entre l'ellipse et le lieu considéré, une droite quelconque passant par A coupant l'ellipse et le lieu au même point.

4. — *Cas de l'hyperbole.* Pour l'hyperbole les asymptotes étant des tangentes particulières coupent (fig. 2) les tangentes AT, A′T′, aux points C, C′ D, D′, et l'on a :

$$\overline{AC} \cdot \overline{A'C'} = - \overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{A'D'} = - \overline{AD}^2 ,$$

d'où $\overline{AD} = - \overline{AC}$[2]. Il résulte de là que la droite AA′ et la parallèle à AT menée par son milieu, qui sont des diamètres conjugués pour l'hyperbole, le sont aussi pour les asymptotes ; donc :

[1] L'existence des diamètres conjugués résulte du théorème I immédiatement.

[2] Ceci montre que le point de contact d'une tangente est le milieu du segment déterminé par les asymptotes sur cette tangente.

Les milieux des segments interceptés par une droite sur l'hyperbole et les asymptotes coïncident.

On déduit de là les propriétés de l'hyperbole relativement aux asymptotes et la définition de l'hyperbole donnée par un point et ses asymptotes.

Enfin la troisième partie du théorème I s'écrit :

$$\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'} = -\overline{4AC}^2$$

De ces propriétés résulte la réciproque du théorème I :

THÉORÈME II_2. *Etant données deux parallèles* T, T', *menées par deux points* A *et* A' ; *le lieu des points* M, *tels que*

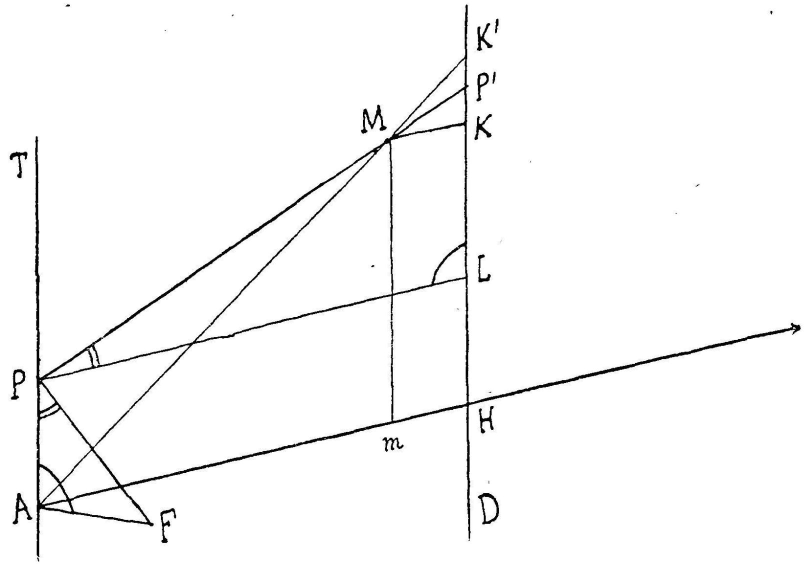

Fig. 3.

le produit $\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'}$ *des segments interceptés sur* T *et* T' *par les droites* A'M, AM, *est constant et égal à* $-4b^2$, *est l'hyperbole passant en* A *et* A' *et ayant pour asymptotes les droites* CC', DD', *telles que* $\overline{AD} = \overline{A'C'} = -\overline{AC} = -\overline{A'D'} = b$.

En effet, une droite quelconque passant par A coupe l'hyperbole et le lieu au même point.

5. — *Propriétés correspondantes de la parabole.* Nous obtiendrons ici le théorème suivant :

A *étant un point d'une parabole,* D *une parallèle à la tangente en* A, *qui coupe la parallèle à l'axe passant en* A *au point* H *intérieur à la parabole ; la droite joignant un point variable* M *de la parabole à* A, *coupe la droite* D *en* K'; *la* *parallèle à l'axe passant par* M *coupe la droite* D *au point* K, *tels qu'on ait*

$$\overline{HK} \cdot \overline{HK'} = 4 \cdot AH \cdot AF \ ,$$

F *étant le foyer.*

Soient, en effet (fig. 3), P et P′ les points où la tangente en M coupe la tangente en A, et la droite D ; L le point où la parallèle à l'axe menée par P coupe la droite D ; nous avons, d'après la propriété de la tangente en A, $\widehat{PAF} = \widehat{PLP'}$; et d'après le théorème de Poncelet $\widehat{APF} = \widehat{LPP'}$, par suite les triangles APF, LPP′ sont semblables, d'où :

$$\frac{LP'}{AF} = \frac{PL}{AP} \ ,$$

ce qui peut s'écrire comme PL = AH,

$$LP' \cdot AP = AF \cdot AH \ .$$

D'autre part, et encore d'après le théorème de Poncelet [1], $\overline{LK} = \overline{HL}$, d'où nous tirons

$$\overline{HK} = 2\overline{AP} \ , \qquad \text{et aussi} \qquad \overline{HK'} = 2\overline{LP'} \ ,$$

de sorte que la relation précédente devient, en remarquant que HK et HK′ sont toujours de même sens, si H est intérieur à la parabole,

$$\overline{HK} \cdot \overline{HK'} = 4 \cdot AH \cdot AF \ ,$$

c'est la propriété annoncée [2].

La réciproque s'obtiendra encore par identification :

Théorème II_3. *Etant donnés le point* A, *la droite* D *et le point* H *de cette droite ; le lieu des points* M, *tels que le produit des segments* HK′, HK, *interceptés par la droite* AM *et la parallèle à* AH *passant par* M, *est constant et égal à*

---

[1] Cette partie du théorème de Poncelet (qui correspond à l'égalité $\widehat{AFP} = \widehat{PFM}$) n'est pas énoncée en général, on en déduit immédiatement la propriété de la sous-tangente.

[2] *m* étant le point d'intersection de la parallèle à D passant en M avec AA′, on obtiendrait facilement la relation

$$\overline{Mm}^2 = 4Am \cdot AF \ .$$

Si H est extérieur, on aura HK · HK′ = — 4AH · AF .

$4AH \cdot l$, *est une parabole dont l'axe est parallèle à* AH, *qui passe par* A *et dont le foyer* F *est sur la symétrique de* AH *par rapport à la parallèle à* D *menée par* A, *à une distance égale à* 1, *et du côté de* H.

(Si l était négatif on porterait la longueur $|l|$ en sens contraire.)

Des trois théorèmes II, on peut déduire une proposition générale :

Théorème général. *Etant donnés deux points* A, A′ *(dont l'un peut être à l'infini), et une droite* D *(ne passant ni par* A, *ni par* A′*), le lieu des points* M *tels que le produit des segments interceptés sur la droite* D *par les angles* MAA′, MA′A, *est constant, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole*[1].

C'est une parabole si l'un des points est à l'infini (théorème II_3), une ellipse si la constante donnée est du signe contraire au rapport des segments déterminés par D sur la droite AA′, et une hyperbole dans l'autre cas. On ramène en effet ces deux cas aux théorèmes II_1 ou II_2.

6. — *Perspective d'une conique.* Le théorème sur la perspective d'une conique (ou la projection parallèle) résulte immédiatement du théorème général précédent. Soit une conique Γ contenue dans un plan Π, S le point de vue et Π_1 le plan sur lequel on projette. Supposons que l'on puisse mener à Γ des tangentes (une tangente pour une parabole) parallèles à la droite D d'intersection des plans Π et Π_1, soient A et A′ les points de contact, M un point quelconque de Γ, les droites AM, A′M, AA′ coupent D aux points Q, Q′ et H et nous avons

$$\overline{HQ} \cdot \overline{HQ'} = C^{te} \quad .$$

Soient A_1, A'_1, M_1 les perspectives de A, A′, M ; la droite A_1M_1 coupe D au point Q, A'_1M_1 en Q′ et $A_1A'_1$ en H, et, d'après la relation précédente et le théorème général, on voit que le lieu de M_1 est une conique.

Si l'on ne peut pas mener de tangentes à Γ parallèle à D

[1] Ce théorème donne par une construction de moyenne proportionnelle les points d'intersection d'une droite D avec une conique définie par les points où la tangente est parallèle à D et un autre point. (Application à la construction des tangentes au point double de l'intersection de deux cônes du second degré.)

(ce qui nécessite que Γ soit une hyperbole), on prendra un plan auxiliaire Π'' coupant Π suivant une droite D' parallèle à une tangente à Γ, et on choisira ce plan de façon que la perspective de Γ sur lui soit une ellipse, en projetant cette ellipse sur Π' on aura la perspective de Γ qui sera bien une conique.

II. — Méthode des projections.

7. — Le théorème I (3[e] partie) et le théorème correspondant pour la parabole sont un cas particulier du théorème connu :

Les rapports anharmoniques des deux faisceaux de droites ioignant deux points d'une conique à quatre autres points de la conique sont les mêmes, théorème évident pour le cercle et qui s'étend aux coniques par projection (théorème de Dandelin).

En effet, en joignant le point A aux points A, M, M_1, A', et le point A' aux mêmes points on aura, en coupant les deux faisceaux obtenus par les tangentes en A' et A

$$(A, Q, Q_1, \infty) = (\infty, Q', Q'_1, A')$$

d'où

$$\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'} = \overline{AQ_1}\,\overline{A'Q'_1} = C^{te} .$$

Les théorèmes inverses se déduiront comme précédemment[1], mais le théorème sur la perspective d'une conique pourra se démontrer de la façon suivante :

Soit Δ l'intersection du plan Π de la conique Γ avec le plan parallèle à Π' mené par S, et soit τ un point de la droite Δ extérieur à Γ, A et A' les points de contact des tangentes menées par ce point, M et M' deux points quelconques de Γ, on a

$$A'(\tau M M' A) = A(A' M M' \tau) .$$

En désignant par A_1, A'_1, M_1, M'_1 les projections de A, A', M, M', par Q, Q_1 ; les points d'intersection des droites A'_1M_1,

[1] Le théorème sur le milieu des segments interceptés par une hyperbole et ses asymptotes sur une droite peut se déduire du théorème de Pascal.

$A'_1M'_1$ avec la perspective de $A\tau$, par Q, Q'_1 les intersections de A_1M_1, $A_1M'_1$ avec la perspective de $A'\tau$, on aura comme la perspective de τ est à l'infini

$$\overline{A_1Q} \cdot \overline{A'_1Q'} = \overline{A_1Q_1}\ \overline{A'_1Q'_1} = C^{te}$$

et comme les droites A_1Q_1, $A'_1Q'_1$ sont parallèles, le lieu du point M_1 est une conique.

G. Valiron (Besançon).

SUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

A propos d'un article de M. G. Combebiac.

Dans son étude sur une théorie de la mesure publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910, M. G. Combebiac considère les fonctions $F(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

1° $F(x, y)$ est continue et croissante comme fonction de y, continue et décroissante comme fonction de x ; il s'ensuit qu'elle est encore continue comme fonction des deux variables x et y.

2° Les valeurs de $F(x, y)$ et de $F(x, z)$ déterminent la valeur de $F(y, z)$.

En supposant de plus que la fonction $F(x, y)$ possède des dérivées premières continues, M. Combebiac établit qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\Phi \left\{ f(y) - f(x) \right\} ,$$

où Φ et f sont des fonctions continues, croissant avec leur argument.

Je me propose de démontrer ici, comme M. Combebiac le présume, que ce résultat est indépendant de l'existence des dérivées de $F(x, y)$.

1. — Si nous ne considérons des valeurs de x que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_1, et des valeurs de y que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_2, x est une fonction continue de F et de y, croissante comme fonction de y, décroissante comme fonction de F.