SUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

Autor(en): **Brouwer, L.-E.-J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13542

$A'_1M'_1$ avec la perspective de $A\tau$, par Q, Q'_1 les intersections de A_1M_1, $A_1M'_1$ avec la perspective de $A'\tau$, on aura comme la perspective de τ est à l'infini

$$\overline{A_1Q} \cdot \overline{A'_1Q'} = \overline{A_1Q_1}\ \overline{A'_1Q'_1} = C^{te}$$

et comme les droites A_1Q_1, $A'_1Q'_1$ sont parallèles, le lieu du point M_1 est une conique.

G. Valiron (Besançon).

SUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

A propos d'un article de M. G. Combebiac.

Dans son étude sur une théorie de la mesure publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910, M. G. Combebiac considère les fonctions $F(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

1° $F(x, y)$ est continue et croissante comme fonction de y, continue et décroissante comme fonction de x; il s'ensuit qu'elle est encore continue comme fonction des deux variables x et y.

2° Les valeurs de $F(x, y)$ et de $F(x, z)$ déterminent la valeur de $F(y, z)$.

En supposant de plus que la fonction $F(x, y)$ possède des dérivées premières continues, M. Combebiac établit qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\Phi\left\{ f(y) - f(x) \right\},$$

où Φ et f sont des fonctions continues, croissant avec leur argument.

Je me propose de démontrer ici, comme M. Combebiac le présume, que ce résultat est indépendant de l'existence des dérivées de $F(x, y)$.

1. — Si nous ne considérons des valeurs de x que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_1, et des valeurs de y que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_2, x est une fonction continue de F et de y, croissante comme fonction de y, décroissante comme fonction de F.

En effet, si cette fonction n'était pas continue, on pourrait déterminer une telle suite de valeurs x', x'', x''', ... possédant une seule valeur limite x_l, et une telle suite de valeurs y', y'', y''', ... possédant une seule valeur limite y_l, que

$$\lim F(x^{(n)}, y^{(n)}) = F(x_a, y_l),$$

où x_a serait une valeur différente de x_l, ce qui est absurde, puisque d'autre part $\lim F(x^{(n)}, y^{(n)})$ doit être égale à $F(x_l, y_l)$.

Cette propriété établie, choisissons deux nombres arbitraires a et b. Il existe un intervalle i_b contenant b, tel que, le nombre β étant arbitrairement choisi dans i_b, on peut déterminer un nombre α satisfaisant l'égalité

$$F(\alpha, \beta) = F(a, b) = \gamma. \tag{1}$$

Soit γ' un nombre variable différant suffisamment peu de γ, et tendant vers γ. Il détermine un nombre β' tendant vers β, et un nombre b' tendant vers b, tels que

$$F(\alpha, \beta') = F(a, b') = \gamma'. \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2) nous concluons

$$F(\beta, \beta') = F(b, b'),$$

ou en passant à la limite

$$F(\beta, \beta) = F(b, b).$$

C'est dire que le nombre arbitraire b est contenu dans un intervalle i_b, dans lequel $F(x, x)$ est une constante. *Donc* $F(x, x)$ *est une constante dans tout le continu numérique.* Désignons cette constante par j.

2. — Choisissons arbitrairement deux nombres d_0 et d_1, et déterminons une série de nombres

$$\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots,$$

se succédant dans leur succession naturelle, et satisfaisant la relation

$$F(d_n, d_{n+1}) = F(d_0, d_1) = \nu.$$

Cette série, prolongée autant que possible de chaque côté, où d'ailleurs elle peut être trouvée finie ou infinie, sera désignée par σ.

Entre d_0 et d_1 il existe un nombre $d_{\frac{1}{2}}$, défini univoquement par la relation

$$F(d_0\,,\, d_{\frac{1}{2}}) = F(d_{\frac{1}{2}}\,,\, d_1)\,.$$

Les nombres d_0 et $d_{\frac{1}{2}}$ définissent une série σ' :

$$\ldots,\ d_{-\frac{3}{2}}\,,\ d_{-1}\,,\ d_{-\frac{1}{2}}\,,\ d_0\,,\ d_{\frac{1}{2}}\,,\ d_1\,,\ d_{\frac{3}{2}}\,,\ \ldots$$

contenant les éléments de la série σ, et telle qu'on a pour chaque $d_{\frac{n}{2}}$:

$$F(d_{\frac{n}{2}}\,,\, d_{\frac{n+1}{2}}) = F(d_0\,,\, d_{\frac{1}{2}}) = \nu'\,.$$

Si σ ne possède pas de premier élément, σ' n'en possède pas non plus. Si, au contraire, σ possède un premier élément, c'est ou le premier, ou le second élément de σ'.

Si σ ne possède pas de dernier élément, σ' n'en possède pas non plus. Si, au contraire, σ possède un dernier élément, c'est ou le dernier, ou l'avant-dernier élément de σ'.

En opérant sur σ' comme sur σ, on obtient une série σ'' :

$$\ldots,\ d_{-\frac{3}{2}}\,,\ d_{-\frac{5}{4}}\,,\ d_{-1}\,,\ d_{-\frac{3}{4}}\,,\ d_{-\frac{1}{2}}\,,\ d_{-\frac{1}{4}}\,,\ d_0\,,\ d_{\frac{1}{4}}\,,\ d_{\frac{1}{2}}\,,\ \ldots$$

contenant les éléments de σ', et telle qu'on a pour chaque $d_{\frac{n}{4}}$:

$$F(d_{\frac{n}{4}}\,,\, d_{\frac{n+1}{4}}) = F(d_0\,,\, d_{\frac{1}{4}}) = \nu''\,.$$

En répétant la même opération un nombre infini de fois, on obtient *un ensemble e, composé des nombres $d_{\frac{n}{2^m}}$ appartenant à l'ensemble des séries $\sigma^{(m)}$*.

3. — L'ensemble e possédant au moins une valeur limite finie, on peut faire tendre une suite d'intervalles $(d_{\frac{n}{2^m}}\,,\, d_{\frac{n+1}{2^m}})$ vers une seule valeur limite finie. Par conséquent $\lim \nu^{(m)} = j$, et toute suite d'intervalles $(d_{\frac{n}{2^m}}\,,\, d_{\frac{n+1}{2^m}})$, dont chaque terme fait partie du terme précédent, tend vers une seule valeur limite finie.

De plus, l'ensemble e ne peut pas posséder de limite supérieure l_s, puisque celle-ci entraînerait l'existence d'un nombre l'_s supérieur à l_s et d'un entier positif p tels que $F(l_s, l'_s) = \varphi^{(p)}$, de sorte que l'_s serait, comme l_s, point limite de l'ensemble e.

Donc *l'ensemble e est partout dense dans le continu numérique.*

4. — Nous définissons une fonction $f(x)$ de la manière suivante :

Si x est un nombre $d_{\frac{n}{2^m}}$ de l'ensemble e, $f(x)$ sera égal à l'indice $\frac{n}{2^m}$. Si, au contraire, x n'appartient pas à e, toute suite de nombres appartenant à e et tendant vers x, aura la même valeur pour limite des indices, et c'est cette valeur limite que nous assignerons à $f(x)$.

Alors *$f(x)$ est une fonction continue et croissante de x.*

Par conséquent $F(x, y)$ *est une fonction continue de $f(y)$ et de $f(x)$, croissante comme fonction de $f(y)$, décroissante comme fonction de $f(x)$.*

5. — Soient x_1, y_1, x_2, y_2 quatre nombres arbitraires satisfaisant la relation

$$f(y_2) - f(x_2) = f(y_1) - f(x_1)\ . \tag{3}$$

Soient $x'_1, x''_1, x'''_1, \ldots$; $x'_2, x''_2, x'''_2, \ldots$; $y'_1, y''_1, y'''_1, \ldots$ des suites de nombres appartenant à e, et tendant la première vers x_1, la seconde vers x_2, la troisième vers y_1.

Déterminons $y_2^{(r)}$ de manière que

$$f(y_2^{(r)}) - f(x_2^{(r)}) = f(y_1^{(r)}) - f(x_1^{(r)})\ . \tag{4}$$

Alors $y_2^{(r)}$ appartient à e, et la relation (4) entraîne celle-ci :

$$F(x_2^{(r)}, y_2^{(r)}) = F(x_1^{(r)}, y_1^{(r)})\ .$$

Comme d'autre part la série $y'_2, y''_2, y'''_2, \ldots$ tend vers y_2, on a, en passant à la limite :

$$F(x_2, y_2) = F(x_1, y_1)\ . \tag{5}$$

Par conséquent l'égalité (3) entraîne l'égalité (5) ; c'est dire que $F(x, y)$ est une fonction de $f(y) - f(x)$ seulement.

En combinant ce résultat avec la propriété déduite dans le § précédent, nous concluons :

$F(x, y)$ *est une fonction continue et croissante de $f(y) - f(x)$.*

C. Q. F. D. L.-E.-J. Brouwer (Amsterdam).