Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES FONCTIONS DE MESURE

Anhang: Nouvelle note complémentaire.

Autor: Combebiac, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13543

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si U contient un nombre ε tel qu'on ait, pour toute valeur entière de ν, $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq \alpha$, on aura *à fortiori* $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq u$, et la proposition sera bien ainsi satisfaite. Dans le cas contraire, on pourra toujours obtenir deux nombres α' et α_2 de D compris entre u_0 et α et tels qu'on aura $\alpha_1 = \Phi(\alpha', \alpha_2)$. En répétant ce procédé, on parviendra soit à un nombre ε qui satisfera à la proposition pour toute valeur de ν, soit à des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha^n, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-1)}$ tous compris entre u_0 et u et tels qu'on aura

$$\alpha^{(p)} = \Phi[\alpha^{(p+1)}, \alpha_{p+2}] .$$

Le plus petit ε des nombres $\{\alpha_p\}$ ou, si ces nombres sont égaux, leur valeur commune satisfera évidemment à la relation $\varphi_\varepsilon(n) \leqq u$ et, par conséquent, la proposition est bien établie.

Cette propriété correspond à la propriété classique des grandeurs mesurables qui, combinée à la propriété archimédienne, permet de définir la mesure d'une grandeur quelconque ou plus généralement le rapport de deux grandeurs quelconques de la même espèce. En appliquant ici l'un des procédés classiques employés à cet effet, on parviendrait facilement à faire correspondre à un nombre quelconque u de U et, par conséquent, à un nombre quelconque x de X un nombre de l'ensemble $\varphi(\sigma)$. Il résulte de là que l'axiome d'Archimède convenablement approprié est le seul qui doive être ajouté à ceux déjà posés pour que la fonction $F(x, y)$ définisse bien un système de mesure pour le champ X. Cette conclusion n'est d'ailleurs pas particulière aux continus linéaires. Elle est en effet établie par une méthode générale dans une *Ebauche d'une théorie des grandeurs*, que je me propose de publier incessamment.

Nouvelle note complémentaire.

Entre les résultats de M. Brouwer et les miens il existe une divergence qui peut s'exprimer, avec ma notation, de la manière suivante : M. Brouwer établit, en contradiction avec certaines des propriétés dont j'ai admis la possibilité, que l'ensemble des valeurs $\left\{ \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \right\}$ est toujours dense sur tout le champ U de la variable u, autrement dit que *la fonction* $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$ (*et, par suite,* $\varphi(\sigma)$) *est continue et prend toutes les valeurs de ce champ.* Je dois reconnaître que c'est M. Brouwer qui a raison, et en voici même une autre démonstration notablement plus longue que celle qu'a donnée ce savant, mais qui satisfera peut-être mieux ceux qui, comme moi, sont insuffisamment familiarisés avec les procédés récents de la théorie des variétés numériques selon MM. Cantor et Schœnflies.

La suite décroissante $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$ a toujours une limite u_0', qui est aussi sa borne inférieure et qui ne peut être inférieure à $u_0 = \varphi(0)$; si elle ne lui est pas identique, on a donc (corol. de 1 et prem. des relations 4) $u_0' = \Phi(u_0, u_0') < \Phi(u_0', u_0')$ et l'on devra toujours avoir à partir d'une certaine valeur de n

$$u_0' < \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) < \varphi(u_0', u_0) ,$$

par suite

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] < \Phi(u_0', u_0')$$

et enfin (corol. de 1),

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < u_0' ,$$

de sorte que u_0' ne serait pas la borne inférieure de $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$. On doit donc bien avoir

$$\lim_{n=\infty} = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \varphi(0) ,$$

c'est-à-dire que la fonction est bien continue pour $\sigma = 0$; cette propriété s'étend facilement à tous les nombres en vertu de la relation $(1)'$, de sorte que la fonction $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$ et, par suite, la fonction $\varphi(\sigma)$ sont bien continues.

D'autre part, la suite infinie et croissante $\{\varphi(\nu)\}$ a toujours une limite (finie ou infinie) u_ω, qui est aussi sa borne supérieure; si ce nombre appartenait au champ U, celui-ci devrait aussi contenir un nombre u_ω' inférieur à u_ω et tel qu'on aurait

$$\Phi(u_\omega', u_\omega') = u_\omega ;$$

et l'on aurait toujours, à partir d'une certaine valeur de ν

$$u_\omega' < \varphi(\nu) < u_\omega$$

et, par conséquent (corol. de 1)

$$\varphi(2\nu) = \Phi[\varphi(\nu), \varphi(\nu)] > \Phi(u_\omega', u_\omega') = u_\omega ;$$

u_ω ne serait donc pas la borne supérieure de $\{\varphi(\nu)\}$, ce qui est contradictoire avec ce qui a été déjà établi.

Il résulte de là que $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue, croissante et prenant toutes les valeurs du champ U; ce champ ne peut d'ailleurs être *limité* (clos) à droite et, si $\varphi(\sigma)$ est bornée supérieurement, il en sera de même de ce champ, mais celui-ci ne contiendra jamais sa borne, de sorte qu'il ne se distinguera pas des champs s'étendant à l'infini.

La proposition 5 ne perd d'ailleurs rien de son intérêt; sa démonstration n'implique en effet nullement que $\Phi(u, v)$ soit une fonction croissante de sa première variable, ni que l'équation $w = \Phi(u, v)$ définisse la variable u comme fonction de v et de w, propriétés qui correspondent évidemment à celles-ci : $F(x, y)$ est décroissante comme fonction de x et l'équation $u = F(x, y)$ définit x comme fonction de y et de u. Il resterait donc à déterminer les métriques dont sont encore susceptibles, ces conditions écartées, les continus linéaires, métriques auxquelles est aussi applicable la proposition 5.

G. Combebiac (Limoges).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel [1].

13. — *Extrait d'une lettre de* M. E.-B. Wilson.

A propos d'une Note de MM. Burali-Forti et Marcolongo.

Je viens de lire dans l'*Enseignement mathématique* (XIII[e] année, pp. 138-148) la réponse que MM. Burali-Forti et Marcolongo font à mon compte rendu des ouvrages *Elementi di Calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* dans le *Bull. of the American Mathem. Society* (vol. XVI, pp. 410-436). Elle m'intéresse comme tout ce que l'on écrit sur l'analyse vectorielle, et, par la façon dont ils répondent à mon simple compte rendu qui ne demandait ni méri-

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI[e] année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45; n° du 15 mars, p. 124-134; n° du 15 mai, p. 211-227; n° du 15 juillet, p. 381; n° du 15 novembre, p. 459-466. — XII[e] année, n° du 15 janvier 1910, p. 39-54. — XIII[e] année, n° du 15 mars 1911, p. 131-148.