u_ω ne serait donc pas la borne supérieure de $\{\varphi(\nu)\}$, ce qui est contradictoire avec ce qui a été déjà établi.

Il résulte de là que $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue, croissante et prenant toutes les valeurs du champ U; ce champ ne peut d'ailleurs être *limité* (clos) à droite et, si $\varphi(\sigma)$ est bornée supérieurement, il en sera de même de ce champ, mais celui-ci ne contiendra jamais sa borne, de sorte qu'il ne se distinguera pas des champs s'étendant à l'infini.

La proposition 5 ne perd d'ailleurs rien de son intérêt; sa démonstration n'implique en effet nullement que $\Phi(u, v)$ soit une fonction croissante de sa première variable, ni que l'équation $w = \Phi(u, v)$ définisse la variable u comme fonction de v et de w, propriétés qui correspondent évidemment à celles-ci : $F(x, y)$ est décroissante comme fonction de x et l'équation $u = F(x, y)$ définit x comme fonction de y et de u. Il resterait donc à déterminer les métriques dont sont encore susceptibles, ces conditions écartées, les continus linéaires, métriques auxquelles est aussi applicable la proposition 5.

G. Combebiac (Limoges).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

13. — *Extrait d'une lettre de* M. E.-B. Wilson.

A propos d'une Note de MM. Burali-Forti et Marcolongo.

Je viens de lire dans l'*Enseignement mathématique* (XIII^e^ année, pp. 138-148) la réponse que MM. Burali-Forti et Marcolongo font à mon compte rendu des ouvrages *Elementi di Calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* dans le *Bull. of the American Mathem. Society* (vol. XVI, pp. 410-436). Elle m'intéresse comme tout ce que l'on écrit sur l'analyse vectorielle, et, par la façon dont ils répondent à mon simple compte rendu qui ne demandait ni méri-

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI^e^ année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45; n° du 15 mars, p. 124-134; n° du 15 mai, p. 211-227; n° du 15 juillet, p. 381; n° du 15 novembre, p. 459-466. — XII^e^ année, n° du 15 janvier 1910, p. 39-54. — XIII^e^ année, n° du 15 mars 1911, p. 131-148.

tait aucune réponse, elle me montre combien je les ai touchés de près.

Mon cher Rédacteur, je ne veux pas me plonger ni entraîner votre *Revue* dans une longue et acrimonieuse polémique. Si MM. Burali-Forti et Marcolongo tiennent à discuter avec chaque auteur et si chacun tient à leur répondre, nous n'en finirons jamais. Du reste, les polémiques n'aboutissent à rien. Cependant, puisque les savants géomètres italiens m'ont attaqué personnellement, il n'est que simple justice que je signale quelques faits.

D'abord, j'ai grand peur que l'empressement de l'attaque de vos correspondants et les petits extraits qu'ils citent de mon compte rendu ne donnent à vos lecteurs une idée très exacte de ce que je pense à propos des travaux de MM. les auteurs. J'ai encore une trentaine d'exemplaires de ce compte rendu que je distribuerai volontiers; si quelques-uns de vos lecteurs s'y intéressent, qu'ils m'écrivent[1]. Ils y liront que j'ai beaucoup de sympathie pour les auteurs et que j'estime à un très haut degré leurs recherches, bien que je me trouve forcé, pour des raisons données, de différer d'eux sur quelques points.

Ils disent de moi : « Elève de Gibbs, il trouve illogique, inexact et condamnable tout ce qui s'éloigne de la méthode de Gibbs », et puis, « pour M. Wilson, il n'y a salut que dans le système de Gibbs ». C'est vrai que j'ai été élève de Gibbs et cela ne me fait pas trop de honte. Mais avant d'être élève de Gibbs, j'ai été élève de G.-N. Peirce, maître enthousiasmé des méthodes de Hamilton. et avant de publier les leçons de Gibbs sur l'analyse vectorielle, j'ai étudié sous ce même Gibbs les méthodes de Grassmann. Je reconnais pleinement toute la beauté des quaternions et de l'*Ausdehnungslehre*. Pourquoi m'accuser de ne pouvoir voir du bon que dans le système de Gibbs ? Ni moi, ni Gibbs n'en dirions autant. Il est bien possible que les méthodes d'Hamilton soient plus nettes que celles de Gibbs ; mais les physiciens s'en moquent. Peut-être les méthodes de Grassmann sont-elles supérieures à celles de Gibbs ; mais les physiciens les négligent. (Ainsi l'illustre Minkowski en aurait pu faire un grand usage dans son mémoire sur le principe de relativité.) Et le nouveau système de Burali-Forti et Marcolongo, serait-il le meilleur du monde, le seul exact et logique, il ne fleurirait chez les physiciens qu'après de longues années. Et pour hâter cet âge de floraison et de fruits, les auteurs feraient mieux, à mon avis, d'être patients, doux et calmes, au lieu d'attaquer avec tant d'ardeur, de dire que personne ne comprend rien, etc. Nous sommes tous attentifs, nous ne demandons qu'à être persuadés, mais nous ne voulons pas et ne pouvons point être forcés. Tout ce que je dis à propos du système de Gibbs est ceci :

[1] Lee Street, 16, Cambridge, Mass. *(Réd.)*

Pour le physicien ce système est peut-être, à l'heure actuelle, le plus commode. Mais, sauf en Amérique, les physiciens ne font pas grand emploi de ce système. Peut-être sera-t-il tout à fait abandonné un jours, même en Amérique. Nous verrons cela, comme disait le père Goriot.

C'est fort naturel que MM. Burali-Forti et Marcolongo, et bien d'autres, me croient et me disent l'adhérent aveugle de la méthode de Gibbs, parce que j'ai été chargé par l'Université de Yale et autorisé par ce maître de publier ses leçons, et parce que, depuis qu'il est mort, j'ai cru que ce fut mon humble devoir que de défendre ses théories et son système, autant que je les ai compris, contre toute attaque qui me semblait peu fondée. Je continuerai à remplir ce devoir ; si j'y manquais, je serais lâche.

Et enfin, mes collègues italiens se plaignent de ce que je n'ai pas critiqué assez les parties les plus importantes de leurs ouvrages, les applications. Ils disent que c'est parce que je ne voulais pas me donner la peine d'examiner ce qui constitue la vraie pierre de touche de toutes les méthodes vectorielles. Peut-être ont-ils raison, mais je pensais autrement. Depuis huit ans j'ai l'habitude, d'abord à l'Université de Yale, et puis au *Massachusetts Institut of Technology*, de donner des leçons sur diverses branches de la physique mathématique, mécanique, hydromécanique, élasticité, électricité et magnétisme, optique, — toujours avec les méthodes vectorielles, méthodes tachygraphiques et fausses sans doute, méthodes quasi vectorielles, dirai-je, pour éviter des calomnies. Et pourquoi m'étonnerai-je de trouver dans leurs livres un peu de tout ce qui était familier à mes élèves ? J'ai bien dit que leurs applications sont admirablement bien choisies et très bien faites. Sans doute un auteur n'est jamais content des comptes rendus de son livre. Lorsqu'il y a deux auteurs cela ne fait qu'augmenter la probabilité de leur mécontentement en raison du carré.

Sur quelques généralisations de la « Courbe de Mannheim ».

A propos d'un article de M. Turrière.

La généralisation de la « Courbe de Mannheim », sur laquelle M. E. Turrière a dernièrement appelé l'attention dans l'*Enseignement mathématique* (XIII, N° du 15 janvier 1911, p. 24-26), n'est pas nouvelle. Déjà en 1907, deux auteurs ont fait rouler, indépendamment l'un de l'autre, une courbe C sur une circonférence, et ont déterminé la courbe Γ décrite par le centre de courbure de C correspondant au point de contact :

1° L'auteur de cette Note, dans un article : *Ueber eine Verallge-*

meinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve (*Math. nat. Mitt. Württemberg*, 2, IX, 1-9)[1].

2° M. P. Ernst (Vienne), *Ein Analogon zur Mannheimschen Kurve* (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, XVIII, 315-316).

Aucun de nous, il est vrai, n'a donné le bel exemple fourni par M. Turrière.

Je puis ajouter que sous peu, dans la thèse qu'il présentera à l'Université de Heidelberg, M. L. Braude donnera une étude d'une généralisation de la « Courbe de Mannheim », qui va encore plus loin. Il m'a autorisé à faire savoir qu'il s'agira avant tout du roulement de deux « Courbes de courbure proportionnelle », c'est-à-dire de deux courbes dont les équations intrinsèques sont

$$\rho = f(s) \qquad \text{et} \qquad \rho = \mu f(s) .$$

Le lieu décrit par le centre de courbure de la courbe roulante, sera pour la courbe fixe une « Zwischenevolute ». M. Braude appelle ainsi les courbes qui sont lieu d'un point qui divise tous les rayons de courbure de la courbe fixe dans le même rapport[2].

Comme type des théorèmes qui en résultent, nous mentionnerons un des résultats obtenus par M. Braude : « Lorsqu'une épicycloïde ou hypocycloïde roule sur une autre quelconque, mais dont les arcs entre deux points de rebroussement ont la même longueur que ceux de la courbe roulante, le lieu du centre de courbure est une épicycloïde ou hypocycloïde raccourcie ou allongée du même module de la courbe fixe. »

H. Wieleitner (Pirmasens).

---

[1] Voir le livre *Spezielle ebene Kurven* du même auteur (Leipzig, G. J. Göschen, 1908, p. 320). L'article mentionné est aussi cité dans G. Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven* (2 vol., 2e éd., Leipzig, B. G. Teubner, 1910-11; vol. II, p. 240), ouvrage dont on ne pourra pas se passer en étudiant quoi que ce soit en courbes spéciales.

[2] Ces « Zwischenevoluten » ont été déjà envisagées comme « développantes imparfaites » par T. Olivier (*Développements de Géométrie descriptive*. Paris, 1843); voir G. Loria, vol. II, p. 271-273.