9e Démonstration.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si dans la dernière égalité on met à la place de $\Sigma \mathrm{AI}^2$ l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{\mathrm{IG}}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r .$$

Donc :

$$2\overline{\mathrm{IN}}^2 + \mathrm{R}^2 \mp 2\mathrm{R}r = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4\mathrm{R}r + \frac{3}{2}\mathrm{R}^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où : $\overline{\mathrm{IN}}^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r\right)^2$, par suite $\mathrm{IN} = \frac{1}{2}\mathrm{R} \mp r$.

Donc les deux cercles A′B′C′ et XYZ se touchent, c. q. f. d.

Corollaire. — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4\mathrm{R}r = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma \mathrm{AI}^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

9ᵉ Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

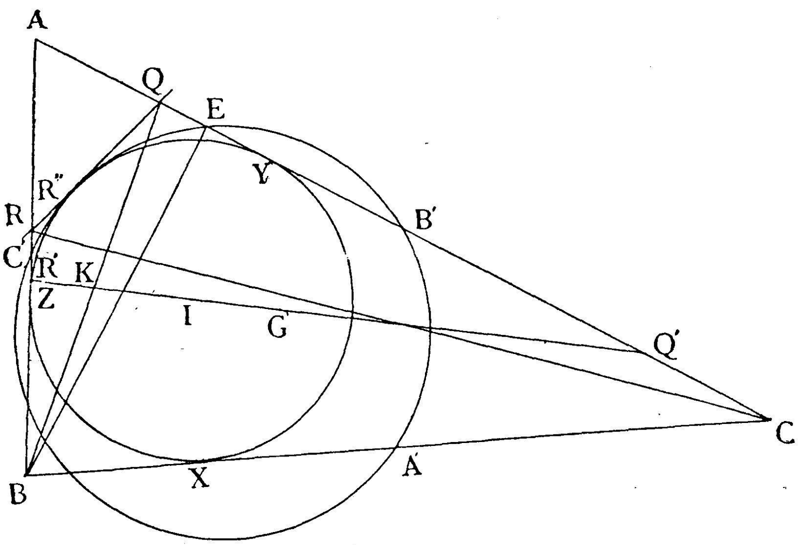

Fig. 9.

Représentons respectivement par a, b, c les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de rencontre respectifs de l'axe radical des deux cercles ABC et XYZ avec AC et AB. (Fig. 9.)

On a alors d'après une propriété de l'axe radical :

$$QB'.\,QE = \overline{QY}^2 \quad \text{ou} \quad QB'.\,(QB' - EB') = (QB' - YB')^2\ ,$$

d'où

$$QB'.\,(2YB' - EB') = \overline{YB'}^2\ .$$

Par suite

$$\frac{QB'}{YB'} = \frac{YB'}{2YB' - EB'} \tag{1}$$

mais

$$YB' = \frac{1}{2}(\mp a\ c) \tag{2}$$

De plus :

$$2b\,.\,EB' = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 2(\pm a + c)\,.\,YB'$$

d'où

$$\frac{YB'}{EB'} = \frac{b}{\mp a + c}$$

donc :

$$\frac{YB'}{2YB' - EB'} = \frac{b}{\mp a + 2b - c}\ . \tag{3}$$

Des relations (1), (2), (3), on tire :

$$\frac{QB'}{\frac{1}{2}(\mp a - c)} = \frac{\frac{1}{2}b \ \text{ ou } \ AB'}{\frac{1}{2}(\mp a + 2b - c)}$$

d'où

$$\frac{QB'}{AB'} = \frac{\pm a - c}{\mp a + 2b - c}\ .$$

Donc :

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB' - QB'}{-(QB' + AB')} = \frac{\mp a - b}{b - c}\ . \tag{4}$$

En échangeant les segments de la droite AC et les segments correspondants de la droite AB, on aura :

$$\frac{AR}{BR} = \frac{\mp a - c}{c - b} = \frac{c \mp a}{b - c}\ . \tag{5}$$

Appelons maintenant Q′ le conjugué isotomique du point Q par rapport au côté AC du triangle ABC et R′ le conjugué isotomique du point R par rapport aux côtés AB du même triangle ; soit K le point où la droite Q'R' coupe la droite BQ; on a d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{QK}} \cdot \frac{\mathrm{QQ}'}{\mathrm{AQ}'} \cdot \frac{\mathrm{AR}'}{\mathrm{BR}'} = 1$$

et comme

$$\frac{\mathrm{QQ}'}{\mathrm{AQ}'} = \frac{-\,\mathrm{CQ} + \mathrm{CQ}'}{-\,\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{CQ} + \mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}} \,, \quad \frac{\mathrm{AR}'}{\mathrm{BR}'} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{AR}} \,.$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{QK}} \cdot \frac{\mp a - c}{b - c} \cdot \frac{b - c}{\mp a + c} = 1 \,,$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{QK}} = -\,1 \,.$$

Donc K est le milieu du segment BQ.

De même la droite Q'R' rencontre le segment CR en son milieu.

Si ensuite on affecte de signes les perpendiculaires abaissées des trois points A, B et C sur la droite Q'R' et qu'on les représente par L, M et N, on a en remarquant (4) et (5) :

$$\frac{\mathrm{L}}{b - c} = \frac{\mathrm{M}}{c \mp a} = \frac{\mathrm{N}}{\pm a - b} \,.$$

Mais

$$\pm\, a \,.\, (b - c) + b \,.\, (c \mp a) + c \,.\, (\pm\, a - b) = 0 \,,$$

d'où

$$\pm\, a \,.\, \mathrm{L} + b \,.\, \mathrm{M} + c \,.\, \mathrm{N} = 0 \,.$$

Donc la droite Q'R' passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour multiples $\pm\, a$, b, c, c'est-à-dire par le centre I du cercle XYZ.

Donc, la droite QR est tangente au cercle XYZ, car si l'on suppose que QR ne soit pas tangente au cercle XYZ et que la tangente (autre que AC) menée du point Q au cercle XYZ rencontre la droite AB en un point R'', les milieux des deux segments BQ et CR'' et le point I seront, comme on sait, en ligne droite; de plus, puisque, comme on vient de le démontrer, le milieu du segment BQ, celui de CR et le point I sont aussi en ligne droite et que le milieu du segment BQ et le point I ne coïncident pas, ces deux points déterminent une droite et le point I sera situé sur la droite passant par le milieu des deux segments CR et CR'', c'est-à-dire sur A'B', ce qui est évidemment contraire à la vérité.

Corollaire I. — P, Q, R étant les points où la tangente commune au cercle des neuf points A′B′C′ d'un triangle ABC et au cercle inscrit ou exinscrit XYZ, coupe les trois côtés de ce triangle et P′, Q′, R′ les conjugués isotomiques de P, Q, R par rapport à ces côtés, la droite qui passe par P′, Q′, R′ passe aussi par les milieux des diagonales du quadrilatère complet que forment les trois côtés du triangle et la tangente commune précédente et par l'un des points de Nagel du triangle.

Démonstration : On a déjà démontré que la droite Q′R′ passe par les milieux des segments BQ, CR et le centre I du cercle XYZ ; et puisque l'anti-complémentaire du point I est un des points de Nagel, il suffit de prouver ici que Q′R′ passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Or, de

$$(b - c) + (c \mp a) + (\pm a - b) = 0 ,$$

on tire

$$L + M + N = 0 .$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour les multiples (chacun vaut 1), c'est-à-dire par le point G.

Corollaire II. — Les rapports des segments portés sur le côté AC du triangle ABC sont :

$$\frac{QC}{b - c} = \frac{Q'Q}{c \mp a} = \frac{QA}{\pm a - b} .$$

Y. Sawayama (Tokio).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Milan, au commencement d'octobre 1911. La date et le programme seront publiés dans un prochain numéro.

Etats-Unis. — La sous-commission américaine vient de publier le 3me fascicule de son *Bulletin*. Il est consacré à un rapport préparatoire concernant la préparation du corps enseignant des collèges et des universités : N° 3. *Provisional Report of the Sub-*