Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

Autor: Sawayama, Y.

Kapitel: 9e Démonstration.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13522

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si dans la dernière égalité on met à la place de $\Sigma\overline{AI}^2$ l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{IG}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Donc :

$$2\overline{IN}^2 + R^2 \mp 2Rr = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où : $\overline{IN}^2 = \left(\frac{1}{2}R \mp r\right)^2$, par suite $IN = \frac{1}{2}R \mp r$.

Donc les deux cercles A'B'C' et XYZ se touchent, c. q. f. d.

Corollaire. — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4Rr = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma AI^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

9e Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

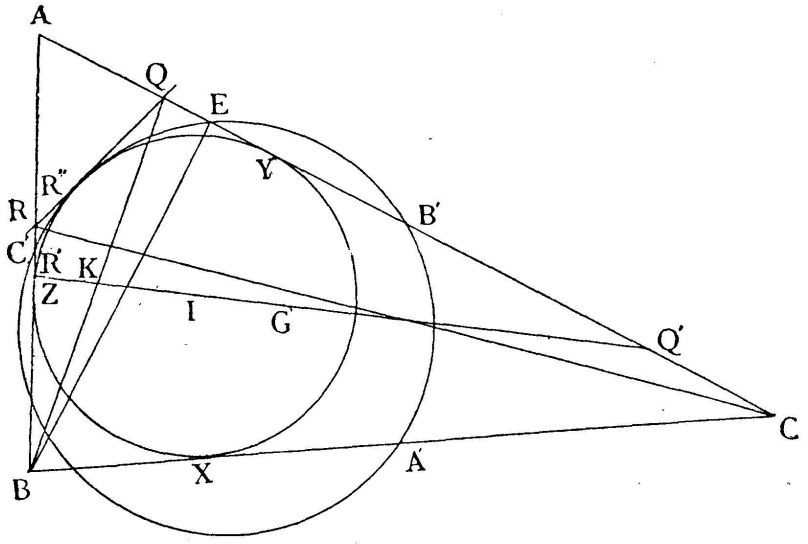

Fig. 9.

Représentons respectivement par a, b, c les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de

rencontre respectifs de l'axe radical des deux cercles ABC et XYZ avec AC et AB. (Fig. 9.)

On a alors d'après une propriété de l'axe radical :

$$QB'.QE = \overline{QY}^2 \quad \text{ou} \quad QB'.(QB' - EB') = (QB' - YB')^2 ,$$

d'où

$$QB'.(2YB' - EB') = \overline{YB'}^2 .$$

Par suite

$$\frac{QB'}{YB'} = \frac{YB'}{2YB' - EB'} \tag{1}$$

mais

$$YB' = \frac{1}{2}(\mp a\ c) \tag{2}$$

De plus :

$$2b\,.\,EB' = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 2(\pm a + c)\,.\,YB'$$

d'où

$$\frac{YB'}{EB'} = \frac{b}{\mp a + c}$$

donc :

$$\frac{YB'}{2YB' - EB'} = \frac{b}{\mp a + 2b - c} . \tag{3}$$

Des relations (1), (2), (3), on tire :

$$\frac{QB'}{\frac{1}{2}(\mp a - c)} = \frac{\frac{1}{2}b \text{ ou } AB'}{\frac{1}{2}(\mp a + 2b - c)}$$

d'où

$$\frac{QB'}{AB'} = \frac{\pm a - c}{\mp a + 2b - c} .$$

Donc :

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB' - QB'}{-(QB' + AB')} = \frac{\mp a - b}{b - c} . \tag{4}$$

En échangeant les segments de la droite AC et les segments correspondants de la droite AB, on aura :

$$\frac{AR}{BR} = \frac{\mp a - c}{c - b} = \frac{c \mp a}{b - c} . \tag{5}$$

Appelons maintenant Q' le conjugué isotomique du point Q par rapport au côté AC du triangle ABC et R' le conjugué isotomique du point R par rapport aux côtés AB du même triangle ; soit K le

point où la droite Q′R′ coupe la droite BQ; on a d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{QQ'}{AQ'} \cdot \frac{AR'}{BR'} = 1$$

et comme

$$\frac{QQ'}{AQ'} = \frac{-CQ + CQ'}{-CQ} = \frac{CQ + AQ}{CQ}, \quad \frac{AR'}{BR'} = \frac{BR}{AR}.$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{\mp a - c}{b - c} \cdot \frac{b - c}{\mp a + c} = 1,$$

d'où :

$$\frac{BK}{QK} = -1.$$

Donc K est le milieu du segment BQ.

De même la droite Q′R′ rencontre le segment CR en son milieu.

Si ensuite on affecte de signes les perpendiculaires abaissées des trois points A, B et C sur la droite Q′R′ et qu'on les représente par L, M et N, on a en remarquant (4) et (5) :

$$\frac{L}{b - c} = \frac{M}{c \mp a} = \frac{N}{\pm a - b}.$$

Mais

$$\pm a \,.\, (b - c) + b \,.\, (c \mp a) + c \,.\, (\pm a - b) = 0,$$

d'où

$$\pm a \,.\, L + b \,.\, M + c \,.\, N = 0.$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour multiples $\pm a$, b, c, c'est-à-dire par le centre I du cercle XYZ.

Donc, la droite QR est tangente au cercle XYZ, car si l'on suppose que QR ne soit pas tangente au cercle XYZ et que la tangente (autre que AC) menée du point Q au cercle XYZ rencontre la droite AB en un point R″, les milieux des deux segments BQ et CR″ et le point I seront, comme on sait, en ligne droite; de plus, puisque, comme on vient de le démontrer, le milieu du segment BQ, celui de CR et le point I sont aussi en ligne droite et que le milieu du segment BQ et le point I ne coïncident pas, ces deux points déterminent une droite et le point I sera situé sur la droite passant par le milieu des deux segments CR et CR″, c'est-à-dire sur A′B′, ce qui est évidemment contraire à la vérité.

Corollaire I. — P, Q, R étant les points où la tangente commune au cercle des neuf points A′B′C′ d'un triangle ABC et au cercle inscrit ou exinscrit XYZ, coupe les trois côtés de ce triangle et P′, Q′, R′ les conjugués isotomiques de P, Q, R par rapport à ces côtés, la droite qui passe par P′, Q′, R′ passe aussi par les milieux des diagonales du quadrilatère complet que forment les trois côtés du triangle et la tangente commune précédente et par l'un des points de Nagel du triangle.

Démonstration : On a déjà démontré que la droite Q′R′ passe par les milieux des segments BQ, CR et le centre I du cercle XYZ ; et puisque l'anti-complémentaire du point I est un des points de Nagel, il suffit de prouver ici que Q′R′ passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Or, de

$$(b - c) + (c \mp a) + (\pm a - b) = 0 ,$$

on tire

$$L + M + N = 0 .$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour les multiples (chacun vaut 1), c'est-à-dire par le point G.

Corollaire II. — Les rapports des segments portés sur le côté AC du triangle ABC sont :

$$\frac{QC}{b - c} = \frac{Q'Q}{c \mp a} = \frac{QA}{\pm a - b} .$$

Y. Sawayama (Tokio).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Milan, au commencement d'octobre 1911. La date et le programme seront publiés dans un prochain numéro.

Etats-Unis. — La sous-commission américaine vient de publier le 3me fascicule de son *Bulletin*. Il est consacré à un rapport préparatoire concernant la préparation du corps enseignant des collèges et des universités : N° 3. *Provisional Report of the Sub-*