CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Allemagne. — Un 4me fascicule du tome premier des *Abhandlungen* vient de paraître. Il traite des Gymnases et des Ecoles réales des villes de la Hanse, du Mecklenbourg et de l'Oldenbourg.

I. Band. Heft 4. — Der mathematische Unterricht in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs, von A. Thaer (Hambourg), N. Geuther (Güstrow), A. Böttger (Oldenburg). — 93 p. in 8°.

Espagne. — M. Z. G. de Galdeano consacre un 2me *rapport* à l'enseignement mathématique en Espagne (18 p.). Après avoir indiqué les grandes divisions prévues par la loi du 9 septembre 1857, qui régit encore l'instruction publique en Espagne, l'auteur donne un aperçu de l'organisation de l'*enseignement supérieur*, technique et universitaire.

France. — Nous venons de recevoir un 2me volume des travaux de la Sous-Commission française, c'est le tome II (157 p.), consacré à *l'enseignement secondaire* et publié sous la direction de M. Ch. Bioche. En voici le sommaire :

Avant-propos.

a) Rapport sur la place et l'importance des mathématiques dans l'Enseignement secondaire en France, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur les classes de mathématiques spéciales et de Centrale, par M. E. Blutel. — Pièces annexes.

c) Rapport sur l'Arithmétique, par M. A. Levy.

d) Rapport sur l'Algèbre, par M. Guitton.

e) Rapport sur la Géométrie, par M. Th. Rousseau.

f) Rapport sur l'Enseignement de la Mécanique, par M. H. Beghin.

g) Rapport sur l'Enseignement de la Cosmographie, par M. A. Muxart.

h) Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles nouvelles, par M. Frank Lombard.

Appendice.

Au moment de mettre sous presse, nous recevons les tomes I *(l'enseignement primaire)*, IV *(l'enseignement technique)* et V *(l'enseignement des jeunes filles)*. La sous-commission française a ainsi terminé les cinq volumes annoncés l'an dernier à la Réunion de Bruxelles.

Iles Britanniques. — On sait que la Sous-commission anglaise publie ses rapports, dont nous avons donné la liste en son temps (*circ.* n° 4, n° de mars 1911, p. 131-133), avec le concours du Board of Education. Ils sont publiés sous le titre général de : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom, being a series of Papers prepared for the International Commission on the Teaching of Mathematics.* Les huit premiers fascicules viennent de paraître ; ils sont mis en vente séparément chez : Wyman and Sons, Londres ; Oliver and Boyd, Edinbourg ; E. Ponsonby, Dublin. En voici la liste :

N° 1. Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. By Mr W. Newbold. — 14 p. in-8°, prix : 1 d.
N° 2. The Relations of Mathematics and Physics. By Dr L.-N.-G. Filon. — 9 p. ; 1 d.
N° 3. The Teaching of Mathematics in London Public Elementary Schools. By Mr P.-B. Ballard. — 28 p. ; 2 d.
N° 4. The Teaching of Elementary Mathematics in English Public Elementary Schools. By Mr H.-J. Spencer. — 32 p. ; 2 1/2 d.
N° 5. The Algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr C. Godfrey. 34 p. ; 2 1/2 d.
N° 6. The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography. By Miss Helen Bartram. — 8 p. ; 1 d.
N° 7. The Teaching of Elementary Mechanics. By Mr W.-D. Eggar. — 13 p. ; 1 d.
N° 8. Geometry of Engineers. By D.-A. Low. — 15 p. ; 1 1/2 d.

Suisse. — La Sous-Commission suisse publie ses travaux sous le titre : L'Enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la Sous-Commission suisse, publiés sous la direction de M. H. Fehr. Ils comprendront 8 fascicules en vente séparément. Le premier consacré aux travaux préparatoires a paru l'an dernier. Les fascicules 4 et 7 viennent de paraître ; les autres sont sous presse ou en composition. Le fascicule est consacré à l'Enseignement mathématique dans *les Gymnases et les Ecoles réales*. Le fascicule 7 donne un aperçu très complet des mathématiques à l'*Ecole polytechnique fédérale*.

N° 4. — Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen, von prof. Dr Brandenberger. (Zurich). — 167 p.

N° 7. — Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, von prof. Dr Grossmann. (Zurich). — 52 p.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences[1].

Congrès de Dijon, 31 juillet-5 août 1911.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie du Congrès de Dijon ont été organisés par le président, M. Emile Belot, ingénieur-directeur des manufactures de l'Etat, à Paris, et A. Gérardin, de Nancy, secrétaire. Les nombreuses et intéressantes communications furent réparties sur neuf séances.

1. — Sur l'*Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, par M. E. Belot.

Le président de Section, M. Belot, présente son ouvrage de cosmogonie tourbillonnaire[2], où il a développé les théories et idées précédemment résumées dans les comptes rendus des congrès de Clermont-Ferrand (1908), de Lille (1909) et de Toulouse (1910). Il rappelle qu'en admettant un dualisme originel composé d'une nébuleuse amorphe qui aurait rencontré un tourbillon gazeux dans un choc analogue à celui d'une Nova, il a pu déduire la démonstration de plusieurs lois nouvelles du système solaire, dont la loi exponentielle des distances des planètes (analogue à la loi de Bode).

M. H. Poincaré a consacré près d'une leçon de son cours à la Sorbonne (1910-1911) à la discussion de cette hypothèse qui peut orienter les recherches astronomiques dans une voie nouvelle.

2. — M. Em. Belot fait ensuite une *critique des méthodes employées en cosmogonie*,

et où l'hypothèse implicite est toujours cachée, à savoir que l'attraction newtonienne est la seule force permettant de rendre compte des formes observées dans le système solaire. La physique moderne, avec ses corpuscules cathodiques, nous donne un exemple de masses animées de vitesses de l'ordre de la lumière et sur lesquelles la pesanteur agit sans pouvoir, d'ailleurs, modifier leur trajectoire. Il a pu en être ainsi à l'origine du monde. Puis M. Belot répond aux objections que M. H. Poincaré a faites dans son cours à la Sorbonne 1910-1911, ayant pour objet l'étude des hypothèses cosmogoniques à partir de Laplace; il fait voir que, dans la cosmogonie tourbillonnaire, les forces d'attraction n'ont pas à intervenir, sauf au voisinage de l'écliptique et que l'hypothèse dualiste, qui est la base de sa nouvelle cosmogonie, ne permet pas de prévoir, par un calcul d'attraction, que les masses du système planétaire se meuvent dans un même plan; au contraire, il est très facile d'aboutir à ce résultat en partant des formules nouvelles qu'il a établies.

3. — Enfin, M. Belot présente une communication très intéressante intitulée :

La genèse de l'atome et la distribution des raies spectrales déduites des lois du système solaire, — Des savants éminents comme MM. Lorentz et

[1] Nous devons ces notes à l'obligeance de M. A. Gérardin (Nancy). *Réd.*
[2] Gauthier-Villars, 1911.

J.-J. Thomson ont cherché des schémas représentatifs de l'atome en l'assimilant plus ou moins à un système solaire. Le regretté physicien Ritz, en partant d'autres hypothèses, a obtenu une loi très générale caractérisant la distribution des raies dans les spectres de lignes. M. E. Belot montre comment peuvent se concilier ces hypothèses en partie contradictoires et comment la genèse de l'atome est analogue à la genèse tourbillonnaire du système solaire et permet de trouver les lois de Balmer et de Deslandres qui sont, pour l'atome, les lois analogues aux lois de distribution des planètes directes et rétrogrades.

La section de météorologie était, pour cet objet, réunie à la première section.

4. — Sur les Notices de la Collection des *Savants du Jour*, relatives à M. Paul Appell et à M. Gabriel Lippmann, publiées par M. Ernest Lebon (Paris).

M. E. Lebon résume les *Notices sur la vie et les travaux* de ces deux savants, l'un mathématicien, l'autre physicien. Il parle des beaux Mémoires du premier sur l'Analyse et de son *Traité de Mécanique rationnelle;* il cite les deux géniales découvertes du second, l'électrocapillarité et la photographie des couleurs par la méthode interférentielle. Il cite les appréciations que M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel, a portées sur ces ouvrages en les présentant à l'Académie des Sciences. M. G. Darboux rappelle que Helmholtz, lors d'un de ses passages à Paris, prit plaisir à signaler à l'Académie des Sciences M. G. Lippmann, qu'il avait vu à l'œuvre dans son laboratoire, comme un de ceux qui devraient sans retard être pourvus d'un enseignement magistral à la Sorbonne.

5. — M. Ern. Lebon présente ensuite un mémoire *sur une méthode élémentaire de décomposition d'un nombre en un produit de deux facteurs.*

Pour décomposer 12 761 717, M. P.-F. Teilhet a indiqué la méthode suivante *(Intermédiaire des Mathématiciens,* quest. 2897, *1905,* p. 74 et 201). Il écrit le nombre N sous la forme

$$N = a^2 - b$$

$$N = (a + k)^2 - (k^2 + 2ak + b)$$

Il reste à trouver une valeur de k telle que le trinôme $k^2 + 2ak + b$ soit un carré.

Modifiant un peu le procédé de M. Teilhet, je suis arrivé à quelques résultats intéressants. Soit N un nombre entier non carré, ρ sa racine carrée à une unité près par défaut, r le reste. Appelant u un entier positif, on peut écrire

$$N = (\rho + u)^2 - (u^2 + 2\rho u - r)$$

Si le trinôme $u^2 + 2\rho u - r$ est un carré v^2, le nombre N est la différence des carrés de deux nombres et, par suite, N peut être décomposé en un produit de deux facteurs qui sont

$$\rho + u - v \quad \text{et} \quad \rho + u + v\,.$$

Le nombre N doit être impair.

Appliquant cette méthode au nombre 13 717 421, décomposé par M. Kraïtchik (*Sphinx-Oedipe*, mai 1911), on trouve au second essai

$$\rho = 3\ 703\ , \quad r = 5\ 212\ , \quad u = 2\ , \quad \nu = 98\ ;$$

$$13\ 717\ 421 = 3\ 607 \times 3\ 803$$

On sait aussi (voir *Sphinx-Oedipe*, 1906, p. 55) que l'on aura $u = 2$ pour les valeurs générales suivantes de N, par exemple

$$N = h^4 + 10h^3 + 33h^2 + 40h + 11$$

$$N = 16h^4 + 128h^3 + 360h^2 + 416h + 161\ .$$

On obtient facilement l'égalité

$$u.f = \frac{1}{2}\left[(\rho - f)^2 + r\right]$$

qui permet de trouver plus rapidement que la méthode classique si un nombre N est composé ou premier, en y faisant f égal aux nombres premiers successifs inférieurs à ρ.

6. — M. G. Tarry, du Havre, présente une intéressante communication, à suivre, sur *les imaginaires de Galois*.

Le nouveau symbole j, représente la racine carrée d'un non-résidu quadratique quelconque.

Je ne considère que les imaginaires du deuxième ordre, racines des équations irréductibles du deuxième degré. Ces imaginaires de Galois sont nécessairement de la forme $a + bj$, j ne pouvant être égal à $\sqrt{-1}$ que dans les modules de forme $4p - 1$.

Généralisation du théorème de Fermat : m étant un nombre premier, a et b n'étant pas tous deux à la fois divisibles par m, on a

$$(a + bj)^{m^2-1} - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ m)$$

Racines primitives du corps quadratique. Elles sont toutes de la forme $a + bj$, a et b étant différents de zéro.

Recherche de ces racines primitives au nombre de $\varphi\ (m^2 - 1)$.

7. — M. Auguste Aubry, de Dijon, présente d'abord à la section un mémoire *sur les nombres de Mersenne*.

M. A. Gérardin s'est voué à terminer l'examen de la célèbre énigme des *Nombres de Mersenne*, dont se sont tant occupés nombre de mathématiciens du plus haut mérite. Aidé des travaux de ses prédécesseurs, il a attaqué la question par plusieurs côtés, dont l'un m'a paru devoir être revu dans tous ses détails, d'autant plus qu'il s'agissait là d'un théorème empirique que j'ai reconnu être — cas particulier d'un théorème donné par Fermat dans une lettre à Frénicle — et, en même temps, une généralisation d'un autre théorème d'Euler.

J'expose complètement la méthode de M. A. Gérardin en démontrant ce qui était resté non prouvé et je termine par quelques réflexions sur la méthode de Fermat que j'estime tout à fait analogue à celle de M. A. Gérardin.

8. — M. A. Aubry, de Dijon, présente ensuite une note intitulée *Problémes concrets et Problèmes abstraits.*

Catalan a dit quelque part, des problèmes concrets, que c'est l'art d'ensevelir, sous de bien inutiles complications, des choses souvent très simples. On pourrait, sans pousser l'examen bien loin, rétorquer facilement cette boutade et dire, avec d'autres éminents savants, que les problèmes sont les compléments de la science. En effet, ils l'impriment dans la mémoire, en rappellent les principes, habituent au classement des idées et en préparent les applications ultérieures théoriques ou pratiques.

Je reconnais qu'il y a déjà trop de recueils de problèmes ; mais combien y en a-t-il qui ne sont que la répétition de questions déjà connues ? On intéresserait davantage les élèves en multipliant les problèmes concrets.

Je donne quelques problèmes de ce genre relatifs aux combinaisons et à la théorie des nombres.

9. — M. H. Chrétien, chef du service astrophysique de l'Observatoire de Nice parle *sur la photographie astronomique à l'Observatoire du Mont Wilson (Californie).*

Description du télescope de $1^{m}50$ de diamètre et de $7^{m}50$ de foyer, construit par le prof. G.-W. Ritchey pour l'Observatoire solaire de l'Institut Carnegie. Mode opératoire et précautions prises pour assurer un guidage précis à moins de $0^{mm},01$. Présentation de 18 photographies inédites de nébuleuses et d'amas stellaires. Considérations sur l'évolution des nébuleuses déduites de la statistique. [Extrait d'un Rapport de Mission adressé à l'Université de Paris (Observatoire de Nice)].

10. — *Courbure des raies spectrales produites par un train de prismes et de réseaux orientés d'une façon quelconque*, note présentée par M. H. Chrétien, de Nice.

Lorsque l'on veut exprimer rigoureusement la trajectoire d'un rayon lumineux dans un spectroscope, on arrive à des expressions très compliquées. Soient O une origine prise au foyer du collimateur et Ox et Oy deux axes rectangulaires situés dans le plan focal ; désignons par Ω l'image de O et par ΩX ΩY; les images de Ox et Oy, en lumière monochromatique ; X et Y sont des fonctions de x et y ; si Oy est parallèle aux arêtes des prismes, on a d'ailleurs $Y = -y$. L'auteur fait connaître l'expression de X en fonction de x et y, pour un développement en série, dont les coefficients dépendent des pouvoirs amplifiant et dispersif du spectroscope et de leurs dérivées.

11. — M. H. Chrétien expose la *meilleure position à donner aux prismes des spectroscopes pour obtenir le maximum de luminosité ou de définition.*

Si l'on tient compte de l'absorption de la lumière dans la matière même des prismes, on trouve que la luminosité de l'instrument augmente un peu lorsqu'on déplace légèrement le prisme de manière à découvrir le collimateur; cette remarque a été faite par le Prof. J. HARTMANN, de Potsdam. Il en est de même du pouvoir de résolution. Mais les calculs des positions optima sont très pénibles ; comme cette position ne dépend que d'un paramètre, on peut dresser une petite table qui la fasse connaître immédiatement ; c'est ce qui a été fait dans le présent mémoire.

12 et 13. — M. Henri CHRÉTIEN présente enfin les deux intéressantes communications suivantes :

Tables à cinq décimales des polynômes X_n *de Legendre.* — Propriétés principales, formules, application.

Table des racines des dix premiers polynômes.

Table complète des dix premiers polynômes de 0,01 en 0,01.

Table à cinq décimales des dix premiers polynômes de 0,001 en 0,001.

Champ magnétique d'une sphère conductrice animée d'un mouvement de rotation. — Cas où la vitesse angulaire est indépendante de la latitude : distribution de la charge. Cas où la vitesse angulaire dépend de la latitude : champ magnétique moyen du soleil.

Rotation d'une sphère fluide sans viscosité.

14 et 15. — M. Léon AUBRY, de Jouy-les-Reims, adresse deux mémoires intitulés *Sur les diviseurs des formes quadratiques* et *Démonstration du théorème de Bachet*

Notre jeune collègue n'ayant malheureusement pu assister au Congrès, M. AUBRY, de Dijon, a bien voulu se charger de la présentation de ces deux intéressantes notes. Il semble qu'en poursuivant dans cette voie, de curieux résultats doivent être rencontrés. Je citerai par exemple la méthode de M. Léon AUBRY qui permet de décomposer en quelques lignes de calcul des nombres relativement grands en une somme de deux carrés. Ainsi

$$858\,001 = 924^2 + 65^2 .$$

Le nombre 858 001 est facteur de $2^{52} + 1$. Ceci me permet, à mon tour, de trouver en quelques minutes la décomposition en une somme de deux carrés de 308 761 441 autre facteur de $2^{52} + 1$, et enfin du nombre $2^{52} + 1$ lui-même, de plusieurs façons. Ainsi,

$$308\,761\,441 = 3\,055^2 + 17\,304^2 .$$

J'insiste sur ce point, car cette méthode permettra d'achever rapidement le tableau que j'ai presque achevé des nombres $2^{2^x} + 1$ et de leurs diviseurs sous la forme $x^2 + y^2$. Je citerai, par exemple, parmi les nombres $< 2^{100} + 1$, le nombre

$$2^{64} + 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617 = 4\,046\,803\,256^2 + 1\,438\,793\,759^2$$

nombre décomposé en 1880 par LANDRY en deux facteurs *premiers*

$$2^{64} + 1 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721 .$$

Il faudra donc étudier ce travail de près.

16. — M. GILBERT présente à la Section de mathématiques et à celle de météorologie réunies dans la salle des projections, une note intitulée *Les tourbillons aériens et leur application à la prévision du temps*.

17. — M. L. MONTANGERAND, astronome à l'Observatoire de Toulouse, présente des *Suggestions sur la carte photographique internationale du ciel*, et *Idées nouvelles pour la découverte des étoiles variables*.

Emploi de la *chambre claire* pour la correction des reproductions des clichés de la carte et l'examen comparatif ultérieur des originaux.

Mesure systématique des étoiles doubles des clichés de la carte.

Découverte d'étoiles variables par examen des traînées obtenues par déréglage du mouvement d'horlogerie de l'instrument photographique des cercles stellaires extra-focaux. Conditions à remplir pour la reconnaissance rapide des étoiles variables des amas globulaires sur des clichés : rapidité de pose, avec grande sensibilité des plaques. et comparaison d'images séparées par des intervalles de quelques heures et juxtaposées sur le même cliché.

18. — M. BROCA, de la Section physique, remercie la Section mathématique au sujet de la subvention que celle-ci lui a accordé pour un perfectionnement apporté aux axes des théodolites, et fait connaître le résultat de ses travaux.

19. — Miss CRAIG présente un mémoire de mécanique céleste et étudie la cause du mouvement spiral dans les nébuleuses, les lois d'impulsion dans les espaces dits *stellaires*, et l'origine des nébuleuses.

20, 21 et 22. — M. A. GÉRARDIN, de Nancy, présente à la Section trois communications ; voici le résumé de la première :

Ayant *une* solution de l'une des équations indéterminées

$$ax^2 + bxy + cy^2 = kz^n$$

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = kz^n$$

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = kz^n$$

avec $n = 2$, 3 ou 4, il est très facile d'obtenir des solutions générales du troisième degré.

Supposons connue, par exemple, une solution

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = h\gamma^2$$

de

$$aX^2 + bXY + cY^2 = hZ^2 .$$

Il suffit de poser

$$X = \alpha + mx , \qquad Y = \beta + my , \qquad Z = \gamma + mf$$

pour avoir m, après division par m

$$m = \frac{2h\gamma f - 2(a\alpha x + c\beta y) - b(\alpha y + \beta x)}{ax^2 + bxy + cy^2 - hf^2}$$

et l'on en tire immédiatement

$$X = c\alpha y^2 - (a\alpha + b\beta)x^2 - h\alpha f^2 - 2c\beta xy + 2h\gamma fx$$
$$Y = a\beta x^2 - (c\beta + b\alpha)y^2 - 2a\alpha xy - h\beta f^2 + 2h\gamma fy$$
$$Z = a\gamma x^2 + c\gamma y^2 + b\gamma xy + h\gamma f^2 - fx(2a\alpha + \beta b) - fy(2c\beta + b\alpha) .$$

De nombreuses et intéressantes applications peuvent en être déduites; je n'en citerai qu'une. En faisant $\beta = 1$, $h = 1$, nous retrouvons notre condition fondamentale de la décomposition des nombres

$$aX^2 + bX + c = Z .$$

La solution connue est

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = \gamma^2$$

α est alors la *solution maxima,* et il suffira d'avoir $Y = \pm 1$ pour trouver immédiatement les facteurs cherchés. Cette condition peut s'écrire

$$(\gamma y - f)^2 - a(x - \alpha y)^2 = \mp 1 .$$

J'ai résolu d'aussi simple façon les huit autres équations types considérées.

La deuxième communication traite de la *Geometria dei Tessuti*, écrit par Ed. Lucas en 1880. J'ai été assez heureux pour trouver cet article rare dans la bibliothèque de M. Laisant, qui a bien voulu me le confier avec plusieurs autres, ce dont nous le remercions ici sincèrement.

Le mémoire d'Ed. Lucas dont, grâce à l'active et dévouée collaboration de M. A. Aubry, de Dijon, nous avons actuellement la traduction complète, verra prochainement le jour.

J'ai profité de cette communication pour rappeler à nos collègues que je cherche à réunir tous les articles, mémoires, tirés à part de tous les arithmologues connus et inconnus, et que je compte sur leur complaisance pour me faire parvenir, même en communication, tout ce qu'ils connaîtront sur ce sujet. Je rappelle ainsi que M. C.-A. Laisant a bien voulu me promettre les archives d'Ed. Lucas, et que M. Perrin me communiquera d'intéressants renseignements sur le même sujet; que M. le Dr Pein m'a fait parvenir plusieurs lettres de Proth, arithmologue autodidacte qui a correspondu avec Ed. Lucas. En présence de ces résultats palpables, et des renseignements que la théorie des nombres est heureuse de ne pas voir tomber dans l'oubli, je constate à regret que certaines portes restent obstinément fermées. Je signalerai ainsi les archives de M. Le Lasseur, de Nantes (mort en 1894); nous serions *très reconnaissants* aux personnes qui pourraient nous faire une communication sur ce sujet, ainsi que sur d'autres professionnels ou amateurs de la théorie des nombres (ils sont malheureusement assez rares).

Je rappelle en terminant que j'ai déjà publié diverses traductions, dues à M. Fitz-Patrick, d'articles anglais ou américains modernes sur la décomposition des nombres : LAWRENCE, Décomposition des nombres en facteurs ; COLE, Sur la décomposition des grands nombres ($2^{67} - 1$) ; LAWRENCE, Détermination de certains nombres premiers (de 7 à 12 chiffres) ; CARMICHAËL, Une table des nombres *multiples parfaits;* Dr MOREHEAD, Note sur des facteurs des nombres de Fermat (nombre *premier* $5 \cdot 2^{75} + 1$) ; Dr MOREHEAD et A.-E. WESTERN, Note sur les nombres de Fermat. — J'en ai d'autres en manuscrit, ainsi que des articles rares de savants français et étrangers, et j'insérerai avec plaisir dans *Sphinx Œdipe* les communications qui me seront faites.

Ma dernière présentation concernait la question à l'ordre du jour.

23. — *Erreurs de raisonnement de mathématiciens connus* (question à l'ordre du jour). M. BELOT indique la querelle des quadrateurs et des simplistes ; M. A. AUBRY, de Dijon, cite plusieurs erreurs historiques intéressantes ; M. A. GÉRARDIN cite, entre autres, une erreur de Viète. – Un rapport sur la question sera présenté au prochain congrès ; cette question forme d'ailleurs une réponse à *I. M.*, 2855 (voir *E. M.*, 1910, p. 417).

24 et 25. — M. MAIRE présente *Deux lettres de Alexandre de Humboldt à François Arago.*

Ces deux lettres, dont l'une est datée du 28 janvier 1836 et l'autre sans date, témoignent, en plus de l'extrême amitié que le grand savant allemand portait à ARAGO, aussi de l'intérêt que prenait de HUMBOLDT aux sciences astronomiques. Il signale, dans la lettre non datée, une Notice que BESSEL, astronome à Kœnigsberg, avait préparée vers 1836, mais que cet astronome n'avait pas encore publiée. Cette étude concerne tout spécialement la comète de HALLEY et les oscillations de la queue. Un extrait assez long de ce Mémoire figure dans cette lettre.

La seconde, celle qui porte la date du 28 janvier 1836, traite à peu près du même sujet.

Ces deux lettres, après recherches faites, paraissent inédites ; néanmoins une réponse à une lettre écrite à Berlin, pourra seule confirmer cette opinion.

Puis la *Bibliographie de Blaise Pascal. Partie scientifique.* — Ce travail, pour la publication duquel l'Association pour l'Avancement des Sciences a bien voulu apporter son concours par une subvention, est à peu près terminé maintenant. Les Tables des matières, la préface et l'introduction restent seules à achever.

Mais il serait utile, dans l'intérêt de l'histoire de la science au XVIIe siècle et de la question PASCAL en particulier, de faire des recherches précises dans les nombreux papiers de CAVALIERI DEL POZZO qui se trouvent en grande partie en Italie, ainsi que dans ceux de LEIBNIZ déposés à la bibliothèque de Hanovre.

Il serait à souhaiter que l'Association francaise pour l'Avancement des Sciences voulût bien, par son puissant concours, favoriser ces recherches.

26. — M. PELLET présente une note *Sur la série de Newton.*

Soit F(x) une fonction holomorphe à coefficients réels. Posons $\frac{F(a)}{F'(a)} = u_0$,

a étant une quantité réelle, et désignons par M le module maximum de $F''(a + 2\theta u_0)$ lorsque θ varie entre -1 et $+1$: $M \leqq | F''(a + 2\theta u_0) |$.

Si

$$| F'(a) |^2 - 2M \, | f(a) | \geqq 0 \,, \tag{1}$$

l'équation $F(a + h) = 0$ a une racine comprise entre $-2u_0$ et $+2u_0$, donnée par la série de Newton. Les termes de cette série ont des modules au plus égaux aux termes correspondants de la série de Newton qui donne la plus petite racine de l'équation du 2e degré, dont le premier membre offre deux variations :

$$| F(a) | - | F'(a) | \, u + \frac{M}{2} u^2 = 0 \,.$$

Ainsi pour l'équation de Képler :

$$u - e \sin (m + u) = 0 \,,$$

e étant compris entre 0 et 1, faisons $a = 0$; on a

$$F(0) = - e \sin m \,, \qquad F'(0) = 1 - e \cos m \,, \qquad F''(u) = e \sin (m + u) \,;$$

par suite $M \leqq e$. La condition (1) devient

$$(1 - e \cos m)^2 \geqq 2e^2 \, | \sin m | \,.$$

Elle est satisfaite quel que soit m si

$$1 - 2e - e^2 > 0 \,,$$

et même si

$$e \leqq \frac{1}{2} \,.$$

27. — M. E.-N. Barisien présente une note *Sur l'inscription dans un triangle du triangle équilatéral minimum.*

La solution géométrique de ce problème est connue.

Nous présentons une solution analytique de la question, qui a l'avantage de mettre en relief (ce que ne donne pas la construction connue), une valeur curieuse de la longueur du côté du triangle équilatéral minimum A'B'C' inscrit dans un triangle ABC, par la propriété suivante : *Si l'on construit du côté extérieur au triangle, le triangle équilatéral* BCA_1, *et si* $AA_1 = \alpha$, *le côté* x *du triangle équilatéral minimum est*

$$x = \frac{2S}{\alpha} = \frac{a h_a}{\alpha} \,,$$

S *étant l'aire de* ABC.

Ce qui revient à dire que : *Le côté* x *est une quatrième proportionnelle au côté* a, *à la hauteur correspondante* h_a *et à la distance* AA_1.

28. — M. Litre envoie un mémoire sur la *Trajectoire et mouvement du pendule de Foucault à chacune de ses oscillations. Dissymétrie des battements d'Est en Ouest et d'Ouest en Est.*

La Section tient à remercier les dames, particulièrement Mlle Bulan, qui ont bien voulu assister à une partie de ses travaux, et aux excursions organisées le 3 août au Val Suzon, et le 4 août chez MM. Marchal, filateurs à Trouhans, et chez MM. Jacob, Delafon & Cie à Belvoye et Pouilly. Nous remercions ici ces Messieurs pour leur cordiale réception.

La Section remercie à nouveau M. Balland, le sympathique bibliothécaire de l'Université, pour les facilités qu'il a bien voulu nous accorder.

M. A. Gérardin a organisé deux séances de projections et présenté diverses collections de vues des congrès précédents, et une série de positifs colorés et en relief pris dans ses voyages en Italie, Suisse, Belgique et autres pays.

M. E. Lebon a vivement remercié notre président M. Belot et M. A. Aubry; de plus, M. Lebon a été assez heureux pour obtenir, à l'assemblée générale, le maintien de la date habituelle. Le changement aurait été, cette année, désastreux, puisque le Ve Congrès international des Mathématiciens aura lieu à Cambridge du 22 au 28 août.

Le prochain Congrès se tiendra à *Nîmes*. Le président des Sections I et II sera M. Ern. Lebon; le secrétaire M. A. Gérardin.

Société mathématique suisse.

2e *Réunion; Soleure,* 1er août 1911.

La *Société mathématique suisse* a tenu sa 2e réunion ordinaire à *Soleure,* le 1er août 1911, sous la présidence de M. le Prof. R. Fueter (Bâle), comme section de la *94e Réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles*.

Dans sa *séance administrative,* la Société a confirmé pour 1912 le comité actuel, composé de MM. R. Fueter (Bâle), H. Fehr (Genève) et M. Grossmann (Zurich). Sur la proposition de MM. les vérificateurs des comptes, MM. Jaccottet (Lausanne) et Meissner (Zurich), elle a approuvé le rapport du trésorier; les recettes se montent à Fr. 900,75, les dépenses à Fr. 236,25, d'où un solde créditeur de Fr. 664,50. Le nombre des membres est actuellement de 112 dont 25 membres à vie.

L'assemblée décide ensuite de tenir une réunion extraordinaire à *Berne,* en décembre 1911; puis, sur la proposition du Comité, elle confère le titre de *membre honoraire*

1° à M. le Prof. C.-F. Geiser (Zurich) qui, par son activité à l'Ecole polytechnique fédérale, par ses remarquables travaux dans le domaine des surfaces algébriques, et par ses relations très étendues avec les mathématiciens du pays et de l'étranger, a largement contribué au développement des mathématiques en Suisse;

2° à M. le Prof. H. Kinkelin (Bâle), un élève du grand mathématicien suisse Steiner, qui s'est particulièrement distingné dans les mathématiques des assurances.

La Société fait en outre une troisième nomination de membre honoraire qui sera proclamée à l'occasion d'un prochain anniversaire.

La *partie scientifique* a fourni d'intéressantes communications. On en trouvera le résumé ci-après.

1. — M. le Prof. Dr KOLLROS (Zurich) démontre, par les méthodes élémentaires de la géométrie synthétique, les principales propriétés de l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, h, que Steiner a énoncées sans démonstration (Crelle 53) et que Cremona a déduites de la théorie générale des courbes planes (Crelle 64)[1].

Il communique en outre quelques résultats de ses recherches relatives à une *surface de 6me ordre et de 4me classe* σ qui peut être considérée comme une généralisation de l'hypocycloïde h. Cette surface a *quatre points aiguilles* aux sommets d'un tétraèdre régulier t; le cône tangent en un de ces points se réduit à deux plans imaginaires dont l'intersection est une hauteur du tétraèdre; les quatre hauteurs se coupent au centre d'une sphère quadruplement tangente à σ.

L'hypocycloïde h touche la droite à l'infini aux deux points cycliques; elle est l'homologue du cercle inscrit au triangle des rebroussements dans la transformation quadratique dont les points correspondants sont les deux foyers réels des coniques tangentes aux trois côtés du triangle.

La surface σ touche la sphère circonscrite au tétraèdre t le long du cercle imaginaire de l'infini; elle est l'homologue de la sphère inscrite à t dans la transformation cubique dont les points correspondants sont les deux foyers des quadriques *de révolution* tangentes aux quatre faces du tétraèdre.

Les équations homogènes des deux figures h et σ présentent des analogies frappantes. L'équation de h, rapportée au triangle des rebroussements est, en coordonnées ponctuelles :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 0 \ ;$$

elle peut s'écrire sous la forme rationnelle :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[1] M. C. WIRTZ a fait une étude analogue dans sa thèse : *Die Steiner'sche Hypozycloïde.*

ou en développant :

$$(xy + yz + zx)^2 = 4xyz(x + y + z) \; .$$

$xy + yz + zx = 0$ représente le cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire le lieu des foyers des paraboles inscrites, ou encore le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle soient en ligne droite ; l'enveloppe de ces droites est homothétique à h.

L'équation de σ rapportée au tétraèdre des points aiguilles est, en coordonnées ponctuelles :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{z} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{t} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(xyz + yzt + ztx + txy)^2 = 3xyzt(xy + xz + xt + yz + yt + zt) \; .$$

$xyz + yzt + ztx + txy = 0$ représente le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre, ou encore le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les quatre faces soient dans un même plan. Il serait intéressant d'examiner si l'enveloppe de ces plans est encore homothétique à σ.

Discussion : MM. Fueter et Tœplitz.

2 et 3. — M. le Dr O. Tœplitz (Göttingue), parle d'abord des recherches récentes *de la théorie des variables en nombre infini.* Cette nouvelle discipline est déjà sortie de son premier cadre, fourni par la théorie des équations intégrales et cela grâce aux récentes recherches de M. Hilbert et de ceux qui ont attaqué dans toute leur généralité la théorie des systèmes d'équations linéaires et des transformations orthogonales de formes quadratiques à un nombre infini de variables (v. la 1re partie de la Note IV de Hilbert). Le conférencier montre, à l'aide d'exemples, quels sont les points de vue nouveaux introduits par Hilbert, et signale les récentes recherches par lesquelles M. Hellinger et lui-même ont

développé cette nouvelle théorie du savant mathématicien de Gœttingue.

Dans une seconde communication, intitulée *Ueber einige geometrische Aufgaben*, M. Tœplitz examine deux problèmes de l'analysis situs qu'il a rencontrés et mentionne un troisième problème, qui reste à résoudre : sur toute courbe plane fermée il existe quatre points formant les sommets d'un carré. — *Discussion :* M. FUETER, SPEISER, LÆMMEL, STÆCKEL et GROSSMANN.

4. — M. le Prof. Dr W.-H. YOUNG (Cambridge et Genève) fait une intéressante conférence sur *les récents progrès de la théorie des séries de Fourier*.

A la question « Sous quelles conditions une série trigonométrique est-elle une série de Fourier ? » il donne les réponses suivantes :

a) Si les fonctions des limites supérieures et inférieures $U(x)$ et $L(x)$ sont bornées ; où $U(x)$ et $L(x)$ sont les

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ ;$$

b) Si $U(x)$ et $L(x)$ satisfont à la condition *a)* sauf dans le voisinage d'un ensemble dénombrable de points et si de plus $\int |U(x)|\, dx$ et $\int |L(x)|\, dx$ existent.

Le conférencier indique les conditions de Fischer-Riesz dans le cas où la fonction $f(x)$, dont on considère la série de Fourier, est une fonction de carré intégrable, il indique que dans le cas général des conditions de cette espèce ne peuvent pas être établies. A cela il joint des exemples de séries trigonométriques qui sont étroitement liées à une série de Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sans toutefois être des séries de Fourier, en particulier la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} \cos nx + b_{n+1} \sin nx) \ .$$

Par contre, il est de toute nécessité de mentionner que la série

$$\sum_{n=1} n^{-q} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \ ,$$

où $0 < q$, est toujours une série de Fourier, comme, du reste, les séries

$$\sum_{n=1} n^q (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1} n^q (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

si $0 < q < d$ et $\left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \mathrm{B}$, où B est une constante finie. Un autre théorème du même genre dit que si A_n et B_n, comme a_n et b_n, sont des constantes de Fourier, la série

$$\sum_{n=1} [(a_n \mathrm{A}_n + b_n \mathrm{B}_n) \cos nx + (a_n \mathrm{B}_n - b_n \mathrm{A}_n) \sin nx)$$

est une série de Fourier.

Comme contribution à la théorie de la convergence, le conférencier donne une condition pour la convergence ou la divergence des séries alliées qui correspond à celle de de la Vallée-Poussin pour la convergence des séries de Fourier.

Soit par exemple $\dfrac{1}{u} \displaystyle\int_0^u [f(x+u) - f(x-u)]\, du$ une fonction à variation bornée, la série alliée converge ou diverge vers $\displaystyle\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\infty} f(x+u) - f(x-u)\, du$, au cas où cette limite est déterminée, sans cela la série oscille. D'ailleurs la recherche conduit à des conditions suffisantes et d'une assez grande portée pour sa convergence, au sens de Cesàro, aussi bien des séries de Fourier que des séries alliées.

Dans les théorèmes de la théorie de l'intégration on insiste sur le fait que la convergence, et encore plus la convergence uniforme, joue un rôle secondaire.

L'équation

$$\int_c^z f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 \int_c^z g(x)\, dx + \sum \int_c^z (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, g(x)\, dx$$

subsiste dans les cas suivants :

1. g est à variation bornée dans l'intervalle fini ou infini (c, z) et dans le dernier cas $\lim\limits_{z=\infty} g(z) = 0$.

2. f est à variation bornée et g possède une intégrale absolument convergente dans l'intervalle fini ou infini (c, z).

3. f^{1+p} et $f^{1+\frac{1}{p}}$ ont, pour $0 < p < 1$, des intégrales absolument convergentes et si $p < 1$ la convergence est prise au sens de Cesàro.

Finalement le conférencier donne une esquisse d'un procédé général de sommation pour les séries de Fourier, procédé qui comprend ceux de Cesàro-Fejier, de de la Vallée-Poussin, de Poisson, etc. Ce procédé se divise en deux parties :

I. Suites de séries finies.

II. Suites de séries convergentes infinies.

La méthode s'appuie sur l'intégration déjà citée dans le cas I. où $z = \infty$. Dans l'équation

$$\int_0^\infty [f(x+kt) + f(x-kt)]\, U_k(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} a_0 \int_0^\infty U_k(t)\, dt + \sum_{n=1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \int_0^\infty U_k(t) \cos nkt dt$$

laissons tendre k vers zéro. Si U est indépendant de k, le premier membre prend, sous des conditions faciles à énoncer, la forme d'un multiple constant du premier membre des expressions

$$\frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0) \,, \qquad \lim_{h=0} \left\{ \frac{F_1(x+h) - F_1(x-h)}{2h} \right\} \,,$$

$$\lim_{h=0} \left\{ \frac{G_2(x+h) + G_2(x-h)}{h^2} \right\} \,, \ldots$$

qui est fini et déterminé, où

$$F_1(x) = \int_0^x f(x)\, dx \,, \qquad F_2(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x)\, dx \,,$$

$$G_2(x+h) = F_2(x+h) - F_2(x) - hF_1(x) \,, \qquad \text{etc.}$$

La méthode appliquée aux séries de Fourier dérivées donne, sous des conditions appropriées. les dérivées correspondantes f', f'' ...

Discussion : MM. Tœplitz, Plancherel, Stäeckel et Madame Young.

5. — M. le D[r] R. Læmmel (Zurich) parle *des paradoxes du calcul des probabilités*. Il montre que des solutions exactes, qui cependant semblent en contradiction, peuvent toujours être rencontrées et que pour obtenir la probabilité il faut suivre un certain processus des hypothèses. A l'aide du paradoxe Bertrand il montre que la valeur de la probabilité dépend non seulement des conditions initiales, mais aussi des conditions de réalisation. Si l'on en tient compte tout paradoxe disparaît. — *Discussion :* M. v. Mises.

6. — M. le Prof. D[r] R. v. Mises (Strasbourg), *Ueber neuere Probleme der Mechanik*. — Dans sa conférence sur les récents problèmes de la Mécanique, M. v. Mises rappelle d'abord les travaux importants que des mathématiciens suisses ont fourni, aussi bien

en Mécanique rationnelle qu'en Mécanique technique. Il montre qu'en particulier dans les *milieux continus* les recherches doivent se développer parallèlement dans ces deux directions. Si l'on sort de la théorie ordinaire de l'élasticité, la Mécanique rationnelle dispose de deux théories qui doivent expliquer les phénomènes observés sur les *corps solides:* la théorie de la plasticité de SAINT-VENANT, qui est un peu tombée dans l'oubli chez les mathématiciens et qui vient d'être reprise sous une forme rudimentaire par les techniciens; puis la théorie élastique de Boltzmann et de M. Volterra. Depuis quelques années M. Duhem a encore élargi les théories mécaniques en adjoignant aux hypothèses des notions thermodynamiques. Le conférencier termine en signalant encore des problèmes récents d'hydrodynamique notamment celui de la turbulence et montre le lien de ce problème avec les éléments de la Mécanique statistique.

7. — M. le Prof. Dr M. PLANCHEREL (Fribourg) parle de *la sommation des séries de Legendre.* — Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, définie dans l'intervalle $(-1, +1)$ et assujettie à la seule condition d'être intégrable en valeur absolue dans l'intervalle $(-1, +1)$. $P_k(x)$ désignant le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre et

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\, P_k(x)\, dx \ ,$$

la série

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(x)$$

est la série de Legendre de $f(x)$. Posons

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)}\, a_k P_k(x)$$

$$\Sigma_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\, a_k P_k(x)$$

on démontre que

$$\lim_{n=\infty} \text{inf. } S_n = \lim_{n=\infty} \text{inf. } \Sigma_n \ , \qquad \lim_{n=\infty} \text{sup. } S_n = \lim_{n=\infty} \text{sup. } \Sigma_n \ .$$

Il suffit donc d'étudier l'une de ces deux expressions. Or, ici, c'est S_n qui se prête le mieux au calcul.

THÉORÈME. $S_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ *en tout point de continuité de la fonction. La convergence est uniforme dans tout intervalle* *entièrement intérieur à un intervalle de continuité de* f. *En tout point de discontinuité de première espèce,* $S_n(x)$ *converge vers* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. *Plus généralement,* $S_n(x)$ *converge vers la dérivée de l'intégrale définie de* $f(x)$ *en tout point où cette dérivée existe.*

Dans ce théorème comme dans les suivants, nous supposons pour abréger, que le point x est un point *intérieur* de l'intervalle $(-1, +1)$. M. Plancherel note encore le théorème suivant.

Théorème. *Si* $f(x)$ *est bornée dans un intervalle* (α, β), $S_n(x)$ *reste comprise dans* (α, β) *entre les limites inférieure et supérieure de* $f(x)$ *dans ce même intervalle.*

Ce qui constitue le principal avantage du procédé de sommation que nous étudions et ce qui le distingue du procédé de Cesàro employé par M. Féjer, c'est qu'il permet d'approcher les dérivées de $f(x)$, là où elles existent. Supposant encore $x \neq \pm 1$, nous avons en effet le

Théorème. $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ *converge, pour* $n = \infty$, *vers* $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ *en tout point où cette dérivée existe. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de* $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$. *Plus généralement,* $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ *converge vers la dérivée généralisée d'ordre* p, *là où cette dérivée généralisée existe.*

Tous ces théorèmes sont des conséquences immédiates de théorèmes relatifs à l'application du procédé de sommation (S_n) à la série de Laplace. Le même procédé conduit à des résultats intéressants dans le cas des séries de Bessel. Le conférencier n'insiste pas là-dessus. La démonstration de ces théorèmes paraîtra prochainement dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* — *Discussion :* MM. Young et Tœplitz.

8. — M. G. Dumas expose ses *recherches relatives à la résolution des singularités des surfaces.* — Prenant un exemple, il considère l'équation

$$(1) \quad Az^{30} + Bx^{28}z^{15} + Cx^{15}y^{10} + Dx^{12}y^{12} + Ey^{16}z^{6} + Fx^{14}y^{18}z^{3} = 0 \; .$$

$$(A, B, C, D, E \neq 0)$$

à laquelle il fait correspondre une certaine surface polyédrale Π[1].

Prenant ensuite, sur Π, le sommet A correspondant au terme de coefficient A, il établit, relativement à ce dernier point et par

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* Paris, 13 mars 1911, p. 682.

le moyen d'un trièdre en rapport avec Π, la substitution

$$(2)\qquad x = \xi^6 \eta^2 \zeta^3 \; , \qquad y = \xi^{12} \eta^3 \zeta^5 \; , \qquad z = \xi^7 \eta^2 \zeta^3$$

qui, appliquée à (1), transforme cette équation en une autre

$$(3)\qquad A + C\zeta^5 + D\xi^6\zeta^6 + E\xi^{24}\zeta^8 + B\xi^{14}\eta^{60}\zeta^{49} + F\xi^{111}\eta^{28}\zeta^{51} = 0 \; ,$$

qu'on peut écrire

$$(4)\qquad \varphi(\xi, \zeta) + \eta\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \; ,$$

où φ et ψ sont respectivement en ξ, ζ et en ξ, η, ζ des polynômes entiers.

Mais de (2), on déduit :

$$\xi = \frac{z}{x} \; , \qquad \eta = \frac{z^6}{xy^3} \; , \qquad \zeta = \frac{x^3 y^2}{z^6} \; .$$

La substitution (2) est ainsi *réversible* et les surfaces (1) et (3) se correspondent point par point.

Si dans (3), respectivement (4), on fait $\eta = 0$, on obtient

$$(5)\qquad \varphi(\xi, \zeta) = 0 \; .$$

Les points de (4) situés dans le voisinage de la courbe (5) ont donc comme correspondants sur (1) des points constituant dans le voisinage de l'origine une partie de la surface.

L'exemple précédent montre ainsi le rôle des surfaces polyédrales Π dans la réduction des singularités des surfaces. — *Discussion :* MM. Fueter, Young, Geiser.

9. — M. Luc. Baatard (Genève) présente un procédé très rapide et tout à fait général pour l'*extraction d'une racine quelconque d'un nombre réel quelconque.* Sa communication sera publiée dans un prochain numéro de l'*Ens. math.*

10. — M. R. de Saussure (Genève) présente une Note intitulée *Réponse à l'article de M. Study sur ma « Géométrie des Feuillets ».*

« Dans un article intitulé « Die Kinematik der Herren de Saussure et Bricard », inséré dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* (n° de juillet-août 1910), M. le prof. Study a fait un compte rendu de mon dernier ouvrage intitulé « Exposé-résumé de la Géométrie des Feuillets » (librairie Kündig, Genève, 1910).

« Dans cet article, M. Study fait une réclamation de priorité relativement à cette nouvelle géométrie, dont je me considère comme l'auteur, géométrie qui est une généralisation de la géométrie réglée, avec cette différence que l'élément primitif qui lui sert de base est non une droite, mais un « feuillet », figure équivalente à une *position* d'un corps solide de forme quelconque.

« Je crois que la seule manière impartiale d'éclaircir la question de priorité soulevée par M. Study est d'établir la liste chronologique des différents articles et travaux que l'on peut considérer comme des précurseurs de la géométrie des feuillets. On pourra laisser ainsi au public impartial le soin de rendre à chacun ce qui lui est dû et de dire après avoir relu ces articles, quel est l'auteur qui a le premier clairement conçu cette nouvelle géométrie et en a défini les formes fondamentales. »

Voici la liste des travaux à consulter :

1. Tait, *Théorie élémentaire des quaternions* (traduction française Plarr, 1884, 2e éd., T. II, p. 165).
2. Stephanos, *Mathematische Annalen* (22e vol., 1883).
3. Study, *Mathematische Annalen* (39e vol., 1891).
4. de Saussure, *Cinématique des fluides. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*, V, 497; VI, 296 (1898).
5. » *Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe. Comptes rendus.* Paris, 1901.
6. » *Théorie géométrique du mouvement des corps. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*, XIII, 425; XIV, 14, 209 (1902).
7. » *Mouvement des fluides.* Id., XIII, 618 (1902).
8. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903.
9. de Saussure, *Théorie géométrique du mouvement des corps. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*, XVIII, 25 (1904).
10. » *Mouvements infiniment petits d'un corps solide.* Id., XVIII, 512 (1904).
11. » *Théorème de cinématique.* Id., XVIII, 602 (1904).
12. » *Mouvement des fluides.* Id., XX, 717 (1905).
13. » *Théorie géométrique du mouvement des corps.* Id., XXI, 36, 129 (1906).
14. » *La géométrie des feuillets.* Id., XXI, 134, 262 (1906).
15. » *Classification des systèmes géométriques.* Id., XXI, 342 (1906).
16. » *Théorème fondamental de la géométrie de l'espace feuilleté.* Id., XXIV, 391 (1907).
17. » *Géométrie des flèches.* Id., XXVII, 86 (1909).
18. » *Géométrie des feuillets.* Id., XXVIII, 425, 651 (1909).
19. » *Les systèmes de corps solides.* Id., XXVIII, 429, 652 (1909).
20. » *Les systèmes de corps solides cotés.* Id., XXIX, 96, 310, 484 (1910).
21. » *Les formes fondamentales de la géométrie des feuillets.* Id., XXIX, 538 (1910).
22. » *Sur les corps solides opposés.* Id., XXX, 198 (1910).
23. » *Exposé résumé de la géométrie des feuillets.* Janvier 1910, Mémoires de la Soc. de Phys. de Genève.
24. Bricard, *La géométrie des feuillets de M. René de Saussure. Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 1910.
25. de Saussure, *Sur les corps solides opposés.* Comptes rendus, Paris, 1910.
26. Study, *Comptes rendus*, Paris, 1910.

27. Bricard, *Comptes rendus*, Paris, 1910.
28. de Saussure, *Comptes rendus*, Paris, 1910.
29. Cailler, *Sur la pentasérie linéaire de corps solides. C. R.*, Paris, 1910.

« En résumé, on peut voir, d'après ce tableau, que les huit coordonnées homogènes d'un corps solide ont apparu pour la première fois chez M. Tait, puis en 1891 chez M. Study, mais ces coordonnées n'ont été appliquées à la géométrie des feuillets qu'en 1903 par M. Study. De mon côté, sans me servir de coordonnées, j'ai fondé la géométrie des feuillets en 1898 par la méthode synthétique, laquelle a l'avantage de mettre cette géométrie à la portée des études mathématiques élémentaires, et de 1898 à 1910 j'ai trouvé l'une après l'autre les formes fondamentales de cette géométrie. »

11. — M. le Prof. Dr H. Fehr (Genève) donne un aperçu très rapide de l'*état des travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique* et plus particulièrement de la sous-commission suisse; il met en circulation les publications les plus récentes.

12. — Comme suite à la communication ci-dessus, M. le Prof. Dr M. Grossmann (Zurich) dépose son rapport sur l'*enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique fédérale*.

13. — M. le Prof. Dr F. Rudio (Zurich) présente le premier volume des *œuvres d'Euler*; c'est le traité d'Algèbre. Il saisit cette occasion pour donner quelques renseignements sur l'état des travaux. Les volumes sous presse ou partiellement composés sont le premier volume de la *Dioptrik* et la Mécanique. Des contrats ont été passés avec quinze auteurs. Deux des collaborateurs ont déjà terminé leur travail de revision et d'annotation ; ce sont M. Kowalewski pour l'*Institionum calc. different.* et M. Krazer pour les mémoires sur les fonctions elliptiques. De son côté M. Eneström revoit en ce moment les manuscrits de St-Pétersbourg.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. R. Dedekind, professeur à l'Ecole technique de Brunswick, a été élu associé étranger de l'Académie royale de Lincei (section de mathématique).

M. E. Fischer, professeur à l'Ecole technique supérieure de Brünn, est nommé professeur ordinaire à l'Université d'Erlangen.

M. R. Fuchs, privat-docent, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. E. Salkowsky est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. A. Schoenflies, professeur à l'Université de Koenigsberg, est nommé professeur à l'Académie des Sciences sociales de Francfort a. M.

Privat-docents. — On été admis en qualité de privat-docents: M. le prof. R. Gans, de Tubingue, à l'Université de Strasbourg. — M. W. v. Ignatowsky, pour la Physique théorique et la Mécanique à l'Ecole technique supérieure de Berlin. — M. R. König, pour les mathématiques, à l'Université de Leipzig. — M. H. v. Sanden, pour les mathématiques appliquées, à l'Université de Goettingue. — M. S. Schimmack, pour la méthodologie des mathématiques à l'Université de Goettingue. — M. L. Schleiermacher, pour les mathématiques pures et appliquées, à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

Angleterre. — Sir J. Larmor, professeur à l'Université de Cambridge, a été élu associé étranger de l'Académie royale dei Lincei (section de mécanique).

La Société mathématique de Londres a attribué la *Médaille de Morgan* au professeur H. Lamb.

M. le Dr A.-N. Whitehead, F. R. S « Fellow » du Trinity College, Cambridge, est nommé « Lecturer » pour les Mathématiques appliquées et la Mécanique à l'University College de Londres.

Autriche. — M. G. Majcen est nommé professeur à l'Université d'Agram.

M. Bydzowsky est admis en qualité de privat-docent à l'Ecole technique supérieure bohême de Prague.

Etats-Unis. — M. G. A. Bliss, de l'Université de Chicago, est nommé professeur à l'Université Harvard.

M. G. A. Hale, directeur de l'Observatoire du Mt-Wilson, est nommé docteur honoraire de l'Université de Cambridge.

M. M. Mason, de l'Université de Wisconsin, est nommé professeur à l'Université Harvard.

M. le prof. A. A. Michelson, de l'Université de Chicago, est nommé docteur honoraire à l'Université de Goettingue.

France. — M. Blutel, prof. de Mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, est nommé inspecteur général de l'Instruction publique en remplacement de M. Combette, nommé inspecteur général honoraire.

M. Maillet est nommé professeur des cours d'analyse et de mécanique (année préparatoire) de l'Ecole des Ponts et Chaussées, en remplacement de M. Haag, décédé.

M. Zoretti, chargé de cours, est nommé professeur de mécanique rationnelle et appliquée à l'Université de Caen.

Faculté des Sciences de Paris. L'Institut aérotechnique, fondé grâce à un généreux don de M. Henri Deutsch, de la Meurthe, a été inauguré à St-Cyr, le 6 juillet, sous la présidence de M. Steeg, Ministre de l'Instruction publique. Des discours ont été prononcés par M. le Recteur Liard, par M. Appell, Doyen de la Faculté des Sciences, et par le fondateur. M. Appell a exposé la tâche qui incombera au nouvel Etablissement pour réaliser l'union de l'action technique et de l'action scientifique. On trouvera son discours dans la *Revue scientifique* du 22 juillet et dans la *Revue du Mois* du 10 août.

Hollande. — M. le Prof. H.-A. Lorentz, de l'Université de Leyde, est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Vienne.

Italie. — M. U. Dini, professeur à l'Université de Pise, a été élu membre ordinaire (non résident) de l'Académie des Sciences de Naples.

M. G.-B. Guccia, professeur à l'Université de Palerme a été élu membre correspondant de la même Académie.

M. O. Tedone, professeur à l'Université de Gênes, a été nommé membre correspondant de l'Académie royale de Lincei.

Suède. — M. H. v. Koch, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stockholm, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm, en remplacement de M. le Prof. E. Mittag-Leffler, qui prend sa retraite.

Nécrologie.

M. J. Grünwald, professeur à l'Université allemande de Prague, est décédé le 1er juillet 1911, à l'âge de 35 ans.

M. le Prof. Dr H. Schubert est décédé à Hambourg le 20 juillet 1911, à l'âge de 63 ans.