Astronomie sphér., 2; Géodésie, 1; Exerc. d'astronomie, 1. — KREBS : Exerc. de mathém., 2.

Zurich; *Universität.* — ZERMELO : Diff. u. Integralrechg., 4; Diff.-gleichungen, 2; Ueb. f. Vorger, 2; Einf. in die Mengenlehre, 2. — WOLFER : Astronomie, 3; Ueb, dazu, 2; Bahnbestimmg. v. Planeten u. Kometen, 2. — WEILER : Darstell. Geomet., I., m. Ueb., 4; Analyt. Geom. m. Ueb., 4; Mathem. Geogr., 2. — E. GUBLER : Algebr. Analysis, 2; Sph. Trigonometrie, 1; Math. Theorie der Pensionsversicherungen, 1.

Zurich; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — HIRSCH : Höh. Mathematik, I, 5; Repet., 1; Uebgn., 2; III, 3; Uebgn., 1. — FRANEL : Mathématiques supérieures, I, 5; Répét., 1; Exerc., 2; III, 3; Exerc., 1. — GEISER : Analyt. Geometrie, 4; Repet., 1; Uebgn., 2. — GROSSMANN : Darst. Geometrie, 4; Repet, 1; Uebgn., 4; Geometrie der Lage, 4; Math. Ueb., 2. — KOLLROS : Géométrie descr., 4; Répét., 1; Exerc., 4; Géométrie de de position, 3; Mathem.-Uebgn., 2. — MEISSNER : Mechanik, II, 4; Repet. 1; Uebgn., 2. — HURWITZ : Zahlenth., 4. — HURWITZ u. MEISSNER : Mathem. Seminar. — MEISSNER : Mechanik, III, 4; Repet., 1; Uebg., 2; Schwingungsprobleme, 1; Elastizitätsth., 2. — BÆSCHLIN : Vermessungs-kunde, II, 4; Repet., 1; Erdmessung, 2. — WOLFER : Einl. in die Astronomie, 3; Uebgn., 2; Th. der Finsternisse, 2.

Cours libres. — BEYEL : Rechenschieber, 1; Darst. Geometrie, 2; Proj. Geometrie, 1; Perspektive u. Axonometrie, 2. — DUMAS : Equat. intégrales, 1. — KELLER : Zentralprojektion, 2. — KIENAST : Attraktionstheorie, 2. — KRAFT : Analyt. Mechanik, 3; Vektoranalysis, 3; Geom. Kalkül, III.

BIBLIOGRAPHIE

J. ANDRADE. — **Le Mouvement,** *mesures de l'étendue et mesures du temps.* — 1 vol. in-8°, 328 p. cart. à l'angl. *(Bibliothèque Scientifique Internationale)* 6 fr.; Librairie Félix Alcan, Paris.

Dans ce livre, la philosophie et la science unies à la technique des mesures de précision du Temps et de l'Etendue rencontrent sur leur route commune une méthode toute nouvelle pour assurer demain aux écoles techniques et professionnelles l'assimilation d'une culture scientifique simple et solide fondée sur une éducation géométrique inductive. Ce livre arrive à son heure; l'heure où l'éducation technique commence à pénétrer, quoiqu'émise discrètement, dans l'enseignement supérieur. Ecrit par un savant qui, familier avec la philosophie de la géométrie et de la mécanique, s'est imposé une discipline nouvelle pour fonder l'enseignement horloger à l'Université de Besançon, cet ouvrage ajoute des résultats intéressants à ceux déjà contenus dans son livre *Chronométrie,* publié antérieurement.

Il fait connaître au grand public, sous une forme maniable, un résumé des annales chronométriques de Greenwich.

Pour la métrologie il résume les travaux de M. Charles Guillaume et, pour la géodésie, les exposés du colonel Bourgeois. Enfin, sur les absolus de la mécanique, l'auteur apporte au philosophe des aperçus tout nouveaux.

H. Bouasse. — **Cours de mathématiques générales** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de mathématiques générales, servant d'introduction aux Cours de Mécanique et de Physique du même auteur. — 1 vol. gr. in-8° de 646 p. Prix : 20 fr.; Ch. Delagrave, Paris, 1911.

L'infatigable travailleur qu'est M. Bouasse, après avoir écrit un Cours de Mécanique servant d'introduction à son grand Cours de Physique, nous donne maintenant un Cours de Mathématiques qui peut servir d'introduction à l'ensemble des œuvres précédentes. C'est à coup sûr un triomphe nouveau pour les idées expérimentales et intuitives, mais la nécessité d'arriver à peu près où l'auteur arrive est si impérieuse que bien des mathématiciens ont déjà fait des efforts plus ou moins fructueux pour se mettre au courant de la Physique et de ses exigences; il leur reste seulement le chagrin (je parle, par exemple, pour moi) de constater qu'ils ne connaîtront jamais la Physique aussi bien que M. Bouasse connaît les Mathématiques. Mon éminent collègue est donc un peu sévère, en bloc, envers les géomètres parmi lesquels beaucoup pensent comme lui. Mais l'intérêt qui s'attache à ce nouveau volume va certainement porter un coup des plus rudes à ce qui peut rester d'enseignement pratique par trop rigoriste.

M. Bouasse définit la continuité en traçant des lignes, présente la notion de fonction sous une couleur analogue et étudie les paraboles et hyperboles de degré quelconque pour illustrer ses définitions. Il y a là déjà des choses des plus intéressantes au sujet de la droite et même au sujet de la droite particulière passant par l'origine; celle-ci fournit l'illustration de la règle de trois; différents systèmes de droites nous initient aux partages proportionnels ainsi qu'aux règles des mélanges et alliages. Naturellement comme la pente d'une courbe a été introduite en même temps que la notion de courbe, nous pouvons nous servir de la notion de dérivée pour ne pas abandonner les polynômes sans parler des racines réelles des équations algébriques et de méthodes d'approximation qui permettent de les obtenir.

Les fonctions circulaires sont, pour M. Bouasse, toutes celles qui résultent des constructions géométriques attachées au cercle et telles qu'elles reprennent visiblement la même valeur quand un point situé sur le cercle parcourt entièrement celui-ci. C'est confondre la fonction périodique avec la fonction circulaire, mais cette confusion voulue n'est-elle pas naturelle chez un physicien qui sait que tous les phénomènes périodiques s'expriment en combinant les fonctions circulaires. D'ailleurs l'auteur se garde bien d'oublier les fonctions classiques élémentaires, trace leurs courbes et y joint immédiatement des combinaisons telles que les courbes de Lissajous. Enfin il termine ce chapitre par les équations transcendantes trigonométriques de même qu'il a terminé le précédent par les équations algébriques.

Et pendant que M. Bouasse tient le cercle et les fonctions circulaires, il en profite pour nous présenter la cycloïde, les épi et les hypocycloïdes et la développante circulaire. Il passe ensuite très sobrement aux sections coniques, mais avec l'intention de s'en servir dans d'élégants exemples. Dans l'étude des enveloppes, par exemple, il traite de la parabole de sûreté et des phénomènes de mirage. Et nous possédons bien assez de courbes maintenant pour les faire rouler ou glisser les unes sur les autres, c'est-à-dire pour faire de la Géométrie cinématique qui permettra de compléter toute l'introduction géométrique qui précède.

Un parti merveilleux est tiré à coup sûr du calcul intégral. Après les intégrations élémentaires sont étudiés les planimètres et intégraphes divers; en passant, les intégrales elliptiques sont signalées d'une manière très simple; la fonction logarithmique a toutes ses propriétés déduites de celles de l'hyperbole équilatère. De là on passe facilement aux fonctions hyperboliques.

La théorie des quantités complexes est encore présentée d'une manière intuitive des plus remarquables; les procédés d'addition notamment sont étendus à la définition des séries à termes complexes. Quant à la notion de fonction analytique, elle conduit immédiatement aux transformations isogonales appliquées à de nombreux exemples.

Les séries en général ont leurs règles de convergence exposées à l'aide de schémas géométriques; je passe sur les séries trigonométriques car il est bien évident que nul ne sait mieux qu'un physicien comment on doit les manier en pratique, mais je signale, avec un vif intérêt, les séries asymptotiques qui semblent converger dans leurs premiers termes tout en étant, au fond, divergentes. On a beaucoup exagéré les difficultés inhérentes à l'étude de ces séries lorsqu'on a reconnu que celles de la Mécanique céleste étaient de cette nature et, à coup sûr, celles de la Mécanique céleste sont d'une étude difficile, mais M. Bouasse, avec les intégrales de Fresnel et la diffraction, nous montre précisément des questions fort simples qui y conduisent.

Dans les équations différentielles une grande importance est attachée au facteur intégrant qui conduit à l'entropie en Thermodynamique. L'intégration au moyen de séries a été également envisagée dans ses traits essentiels. Viennent ensuite les intégrales définies simples, doubles ou triples, puis les fonctions eulériennes.

Et, dans tout cela, nous ne sommes point sortis de l'espace à deux dimensions. En géométrie à trois dimensions, je signalerai surtout l'usage des transformations simples, notamment de la perspective, pour simplifier l'étude de nombreuses figures; l'usage de surfaces élémentaires, telles que le tore, pour obtenir, par section plane, des courbes qui, définies dans leur plan, seraient relativement compliquées; l'applicabilité des surfaces les unes sur les autres et le problème des cartes géographiques.

Les courbes gauches sont naturellement présentées avec les surfaces développables, ces dernières donnant lieu à la considération des surfaces d'égale pente, des remblais, des cônes d'éboulis. Avec les courbes tracées sur le cône nous retrouvons la loxodromie conique dont j'avais déjà signalé la curieuse génération physique en analysant ici même (1910, p. 73) le tome VI du Cours de Physique.

Avant d'aborder les surfaces réglées, M. Bouasse définit d'une manière générale les ensembles de droites, complexes et congruences : dans la courbure des surfaces il étudie élégamment les surfaces de révolution et, cherchant celles dont la courbure moyenne est constante, il trouve pour méridiens les trajectoires de foyers de coniques roulant sur une droite. Comme surface bien peu connue des géomètres, il faut signaler le cône sphérique obtenu en supprimant un fuseau dans une sphère élastique et en rapprochant les deux méridiens formant les bords de la lacune. Le nouveau méridien dépend très élégamment d'une intégrale elliptique de seconde espèce.

L'Ouvrage se termine par l'étude des flux et de la circulation des vecteurs puis par quelques généralités sur les équations aux dérivées partielles de la Physique. Le passage de l'intégrale triple d'une divergence à un flux superficiel fermé (formule de Green) et d'un flux superficiel ouvert à une circulation (formule de Stokes) sont présentés avec la simplicité qui caractérise des identités.

Quant aux équations de la Physique, elles sont linéaires ; comme dans toute son électroptique, M. Bouasse montre surtout l'importance et la simplicité des solutions exponentielles auxquelles correspondent les ondes planes.

Enfin un dernier chapitre est consacré aux exercices pratiques et aux manipulations. C'est dans celui-là que l'auteur plaisante légèrement les mathématiciens. Il est certain que l'invention de la Physique mathématique ne semble pas avoir rapproché beaucoup géomètres et physiciens. Mais tout n'est pas dit et une sorte de Mathématique physique est en train de se créer ; M. Bouasse aura fait beaucoup pour cela. Je crois très sincèrement que ce volume est appelé à un grand succès ; par-ci par-là quelques petites critiques de détail sont possibles mais, en de tels endroits, les corrections seraient aisées et, par suite, l'esprit du livre, l'effort qu'il représente vers l'utilité et la compréhensibilité sont choses destinées à demeurer solidement.

A. Buhl (Toulouse).

L. Crelier. — **Systèmes cinématiques.** — 1 vol. cart. in-8°, de la *Collection Scientia,* 100 p., 13 fig. et un portrait du colonel Mannheim ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce nouveau volume de la *Collection Scientia* contient l'étude géométrique des formes simples qui sont à la base des mécanismes cinématiques. L'auteur s'est borné aux types les plus importants et les plus intéressants au point de vue géométrique ; ce sont les suivants : Système conchoïdal. — Système du cappa. — Système strophoïdal simple. — Système conchoïdal circulaire. — Système à deux ornières fixes. — Système bielle-manivelle.

Chacun de ces systèmes est étudié, par la méthode de la Géométrie analytique, dans ses principaux problèmes concernant les enveloppes, les trajectoires, les développantes, etc.

M. Crelier a été bien inspiré en plaçant en tête de cette intéressante monographie le portrait du colonel Mannheim, dont les *Principes et développements de Géométrie cinématique* contiennent les fondements des recherches sur les systèmes cinématiques. Ce petit volume engagera plus d'un lecteur à lire le bel Ouvrage du savant géomètre français.

F. Enriques. — **Fragen der Elementargeometrie.** I Teil : *Die Grundlagen der Geometrie.* Deutsche Ausgabe von H. Thieme. — 1 vol. in-8, X-366 p. ; 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Sous le titre de *Questions de géométrie élémentaire,* M. Enriques a réuni une série d'articles, dûs à divers géomètres italiens, et étudiant d'une manière élémentaire les principales questions des fondements de la géométrie et des constructions géométriques. L'ouvrage est déjà bien connu par le second volume, consacré aux constructions et publié en 1907.

Le tome I, qui vient de paraître, est consacré aux questions très délicates des fondements de la géométrie. M. Enriques examine d'abord le côté philosophique des questions qui se rattachent aux fondements de la géométrie et fait ensuite d'intéressantes remarques quant à l'enseignement de la géométrie.

Puis viennent les chapitres suivants :

Les notions de droite et de plan par M. U. Amaldi (Modène).

Congruence et mouvement, par A. Guarducci (Prato).

Sur l'application des postulats de la continuité en géométrie élémentaire, par G. Vitali (Gênes).

Sur la théorie de l'équivalence (égalité), par U. Amaldi.

Les proportions, I d'après Euclide ; II nouveaux développements, par G. Vailati.

Sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne, par R. Bonola ; cette étude comprend :

I. Histoire des recherches sur les parallèles. La géométrie non-euclidienne ; *a)* directions métrique et différentielle ; *b)* direction projective.

II. Théorie générale des parallèles. Géométrie hyperbolique. Géométrie elliptique.

On voit par cette rapide énumération l'esprit dans lequel est conçu cet ouvrage qui s'adresse, comme on le voit, aux professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et aux étudiants en mathématiques. Au moment où l'on tend à créer ou à développer dans l'enseignement universitaire des cours et des séminaires spécialement consacrés aux questions de mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur, l'ouvrage de M. Enriques est appelé à rendre de grands services. H. F.

G. Herting. — **Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral** zum Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. — 1 vol. in-8°; 2 M. 80; B.-G. Teubner, Leipzig.

L'auteur s'est préoccupé d'introduire la notion d'intégrale définie dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire. Il part pour cela de divers problèmes de géométrie élémentaire, mesure des longueurs, des surfaces et des volumes et il les traite par la méthodes des limites. Puis vient la notion d'intégrale comme limite de sommations, le calcul de quelques intégrales définies suivi d'applications nombreuses et bien choisies.

Le livre répond bien à son but et pourra être employé utilement. Il contient cependant quelques lacunes. La notion de limite devrait être mieux précisée; il est inutile de parler de grandeurs qui tendent vers une limite sans l'atteindre. En plusieurs endroits, l'auteur aurait pu, par un mot, par une phrase, par la substitution de lim Σ à Σ, obtenir plus de rigueur sans faire de tort à l'exposition. M. Plancherel (Genève).

Adolf Kneser. — **Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik,** Vorlesungen an der Universität zu Breslau. — 1 vol. 8°, 243 p. ; 6 M.; Vieweg und Sohn. Braunschweig.

Pour caractériser le plan du livre et le but de l'auteur, citons quelques lignes de la préface : « ... Les mathématiciens se sont dernièrement occupés de développer la théorie générale des équations intégrales, en particulier les analogies algébriques de cette théorie. Si intéressantes que puissent être ces recherches, il me semble pourtant que les applications qui ont servi de point de départ à la découverte de Fredholm ont été trop peu mises en lumière. En tout cas, il n'est pas facile au mathématicien non spécialiste et au physicien de pouvoir, à l'aide des publications existantes, pénétrer jusqu'aux applications particulières, qui sont pourtant, pour toute théorie durable, la pierre de touche de sa valeur. Je crois donc être utile à la science en publiant cet ouvrage, qui part entièrement des applications, conduction de la chaleur, oscillations libres et forcées, théorie du potentiel. Chaque problème y est traité individuellement avec le minimum de théorie générale. Je puis montrer ainsi ce que la nouvelle théorie apporte d'inédit et en quoi elle est parallèle aux anciennes méthodes. Par une telle disposition, j'espère non seulement inciter les jeunes mathématiciens à un travail fructueux sur des problèmes concrets, mais encore déterminer les physiciens à essayer et appliquer cette nouvelle théorie. » Voici, d'autre part, la table des matières du livre :

1. Equations intégrales et conduction de la chaleur. 2. Equations intégrales et oscillations des systèmes linéaires de masses. 3. Equations intégrales et théorie de Sturm-Liouville. 4. Conduction de la chaleur et oscillations dans les domaines à deux et à trois dimensions. 5. Théorèmes d'existence et problème de Dirichlet. 6. Les séries de Fredholm.

Le livre de M. Kneser ne fait donc pas double emploi avec le *tract* de M. Bôcher sur le même sujet, récemment analysé dans cette Revue. On remarquera que la théorie de Fredholm passe à l'arrière-plan et que M. Kneser s'arrête sutout aux méthodes de Schmidt et de Hilbert. Un inconvénient du livre, inévitable par le fait même du plan, c'est que la théorie proprement dite des équations intégrales est un peu noyée dans le riche contenu d'applications que le livre renferme. Ajoutons encore que l'ouvrage n'exige pas de connaissances spéciales pour sa lecture. Il forme en particulier, pour le physicien, un utile complément à l'ouvrage de M. H. Weber : *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik.*

M. Plancherel (Genève).

G. Lazzeri und A. Bassani. — **Elemente der Geometrie** (Unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). — Aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. — 1 vol. in-8°, XVI-491 p.; 14 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet Ouvrage contient les éléments de Géométrie exposés d'après la méthode de la *fusion de la planimétrie et de la stéréométrie.* Nos lecteurs connaissent le principe de cette méthode qui a été défendue dans cette *Revue* par l'un des principaux fondateurs, Ch. Méray. La première édition de son traité remonte à 1874, tandis que le premier ouvrage italien, établi sur des bases différentes, a été publié par de Paolis en 1884.

Le présent Ouvrage se rattache dans ses grandes lignes à l'ordre tracé par de Paolis. Les auteurs ont expérimenté leur méthode depuis plus de vingt ans à l'Académie Militaire de Livourne. Ils ont publié une première édition en 1891 ; cette traduction a été faite principalement d'après la deuxième édition ; elle a été rédigée avec beaucoup de soin par un géomètre allemand qui a une grande expérience de l'enseignement, M. le professeur Treutlein (Carlsruhe).

Indiquons brièvement le contenu du volume. Les matières sont réparties sur cinq livres :

I. — Les figures géométriques. Droite et plan. Segment de droite, angle, dièdre. — Notions fondamentales concernant la circonférence et la sphère. Parallélisme de droites et de plans. — Perpendicularité de droites et de plans. — Lieux géométriques.

II. — Polygones, angles polyèdres ; cas d'égalité. — Polyèdres. — Lieux géométriques.

III. — Propriétés concernant les droites, les plans et les sphères. — Polygones inscrits dans une circonférence ; polyèdres inscrits dans une sphère. — Inversion. — Corps de révolution ; cônes et cylindres.

IV. — Equivalence des figures.

V. — Proportionnalité. — Similitude. Applications.

L'Ouvrage contient 336 figures d'une exécution irréprochable et se termine par une collection de plus de mille exercices : théorèmes à démontrer ; les lieux géométriques et problèmes.

R. DE MONTESSUS et R. D'ADHÉMAR. — **Calcul numérique.** *(Opérations arithmétiques et algébriques, Intégration).* — 1 vol. gr. in.18, 250 p. ; 5 fr. ; O. Doin & fils, Paris.

Ce nouveau volume de la collection de l'*Encyclopédie scientifique* traite du *Calcul numérique,* tandis que dans un autre volume, que nous avons annoncé en mai, on étudie plus spécialement le *Calcul mécanique*. L'Ouvrage est divisé en deux parties :

La *première partie* traite des opérations arithmétiques, abrégées et surtout du calcul pratique des racines des équations tant algébriques que transcendantes. Tous les procédés de calcul des racines sont exposés et des applications numériques nombreuses illustrent les méthodes. Les principes du calcul des différences terminent cette partie.

Dans la *seconde partie,* l'on trouvera une théorie des *Intégrales* et des *Equations différentielles* et aux *Dérivées partielles,* avec applications numériques et des applications de la méthode des *approximations successives* aux *fonctions implicites* et aux *équations.*

Niels NIELSEN. — **Théorie des fonctions métasphériques** professée à l'Université de Copenhague. — 1 vol. in-4o de VII-212 p. Prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1911.

Ce beau volume présente sous le nom de fonctions métasphériques, sinon des fonctions absolument nouvelles, du moins des fonctions qui permettent de présenter sous un jour nouveau les fonctions hypergéométriques. On connaît les recherches et les volumes déjà publiés par M. Nielsen sur les fonctions cylindriques et sphériques. Or on peut conclure de là, sans aller d'abord jusqu'à la généralité de la série hypergéométrique, les fonctions qu'étudie l'auteur, lesquelles, combinées avec les fonctions eulériennes, permettent d'obtenir finalement tout ce que la série hypergéométrique a donné de pratique. Ce nouveau point de vue paraît fécond en résultats élégants.

Ainsi les nouveaux développements obtenus convergent dans des régions du champ complexe limitées par des courbes simples dont les premières furent entrevues par Charles Neumann et étaient des ellipses à foyers fixes.

L'intérêt du volume saute facilement aux yeux car on y trouve un grand nombre de résultats définitifs représentés par de nouveaux développements, des généralisations d'intégrales classiques, de formules dues à Gauss et à Dirichlet. Quand les fonctions étudiées sont considérées comme fonctions de deux variables, à savoir la variable ordinaire x et un paramètre α qui figure dans les coefficients de l'équation différentielle qui les définit, elles satisfont à une équation aux dérivées partielles en x et en α, d'où des considérations analogues à celles de la théorie des fonctions modulaires.

Enfin le volume se suffit à lui-même ; l'auteur y a placé quelques chapitres d'introduction où il reprend notamment, avec une concision remarquable, la théorie des fonctions eulériennes. Il ne me semble pas exagéré de dire qu'on pourrait recommander son étude même à qui ignorerait la série hypergéométrique ; M. Nielsen conduirait sans doute le lecteur vers cette fonction, ses cas particuliers et ses applications avec un effort relativement faible. A. Buhl (Toulouse).

Andreas Voigt. — **Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-136 p.; 4 M.; G.-J. Göschen, Leipzig.

Ce volume offre un très intéressant essai de synthèse. L'auteur remarque avec raison qu'en mathématiques on considère beaucoup plus fréquemment que les nombres isolés, des ensembles de nombres satisfaisant tous à une même définition, ayant tous une même propriété. C'est d'ailleurs là l'idée fondamentale de la théorie des ensembles. Les ensembles arithmétiques ici considérés sont, en premier lieu, ceux qui résultent d'une suite d'entiers

$$\overset{0}{\nu}_0 , \quad \overset{0}{\nu}_1 , \quad \overset{0}{\nu}_2 , \quad \dots , \quad \overset{0}{\nu}_s$$

puis d'une seconde suite

$$\overset{1}{\nu}_0 , \quad \overset{1}{\nu}_1 , \quad \overset{1}{\nu}_2 , \quad \dots , \quad \overset{1}{\nu}_s ,$$

où $\overset{1}{\nu}_r = \overset{0}{\nu}_0 + \overset{0}{\nu}_1 + \dots + \overset{0}{\nu}_r$, à laquelle on peut adjoindre une troisième suite par une définition analogue pour continuer ainsi indéfiniment. Une telle définition fait penser au triangle de Pascal et il s'agit bien, en effet, de quelque chose d'analogue mais de plus général. D'ailleurs les propriétés du binôme, ainsi que celles des coefficients de séries plus générales, sont retrouvées ensuite comme cas particulier des propriétés des tableaux à deux dimensions définies en premier lieu.

Après cette première partie nous rencontrons un problème plus profond et qu'on peut faire saisir au moyen d'une comparaison simple. La suite des nombres entiers étant définie, nous y intercalons des nombres fractionnaires fort distincts des premiers mais qu'on doit cependant relier avec eux. Or dans les séries de nombres construites dans la première partie de l'ouvrage, ne peut-on introduire d'autres nombres qui, en vertu de certaines conventions, pourront jouir de certaines propriétés des nombres primitifs ?

Je ne suis pas absolument sûr que de telles préoccupations soient toujours aussi originales que l'auteur paraît le croire, mais la contribution qu'il apporte à de telles idées justifie amplement la publication de cette œuvre aux notations élégantes, où bien des problèmes épars sont rassemblés d'une manière systématique. A. Buhl (Toulouse).

J.-W. Young. — **Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry.** Prepared for publication with the cooperation of W.-W. Denton. With a Note on the growth of algebraic symbolism by U.-G. Mitchell. — 1 vol. in-8°, 247 p.; 1 s. 6 d.; Mac Millan & C°, New-York.

L'auteur a réuni dans ce volume 21 conférences qu'il a faites à l'Université de l'Illinois pendant l'été 1909. Ces études, présentées d'une manière très claire, seront lues avec intérêt par tous ceux qui se préoccupent de la question des principes fondamentaux de l'algèbre et de la géométrie. Elles sont données sous une forme élémentaire en ce sens qu'elles ne supposent chez le lecteur que des connaissances mathématiques relativement restreintes.

Par science mathématique M. Young entend : « Toute série de théorèmes tels que chacun des termes de la série, à partir d'un certain rang, soit une conséquence logique formelle d'un ou plusieurs des théorèmes qui le précèdent. » Cela nécessite à la base l'adoption d'un certain nombre de termes non définis et de quelques théorèmes non démontrés (axiomes ou postulats). La conception des géométries non-euclidiennes en découle tout naturellement, et à ce sujet M. Young reprend et développe la représentation d'un monde non-euclidien de M. Poincaré. Il en arrive ainsi à démontrer que la connaissance intuitive n'est pas suffisante pour caractériser avec précision le sens à attacher aux propriétés liées aux conceptions abstraites fondamentales de la géométrie et plus spécialement au postulat des parallèles d'Euclide. L'historique de ce postulat établit qu'il ne semble pas avoir satisfait Euclide lui-même au même titre que ses autres postulats.

Ce n'est cependant qu'au XVIIIe siècle que la question a été sérieusement reprise avec Saccheri, puis Gauss et surtout Lobatschewski et Bolyai. Selon M. Young, le choix des théorèmes pouvant être considérés comme des axiomes n'a rien de définitif; il passe en revue les définitions de quelques philosophes tels que Kant et Mill. Ensuite, partant de deux termes non définis et de l'expression de sept principes, il en déduit d'une manière logique de nouveaux principes et démontre qu'ils satisfont aux conditions nécessaires de conséquence, indépendance et catégorisme, dont il a donné la définition ; il conclut que « aucun terme ne doit être explicitement défini s'il ne peut l'être en termes représentant des idées notablement plus simples que le terme à définir. »

Cette première partie met en lumière le fait que la signification généralement attachée à des principes fondamentaux tels que la distance et la droite manque de précision, et que les axiomes et postulats de la géométrie ne peuvent être acceptés comme des vérités évidentes par elles-mêmes. Suit une discussion serrée des divers principes fondamentaux des mathématiques en commençant par celui de classe qui amène, sans nouvelle supposition, aux nombres cardinaux, puis aux classes finies et infinies. Les éléments d'une classe sont susceptibles, soit de certaines *relations,* soit de certaines *opérations* au moyen desquelles on peut les caractériser. A la catégorie des relations appartient entre autres l'*ordre*. Pour chaque nouvelle propriété l'auteur vérifie qu'elle satisfait aux conditions de conséquence, indépendance et catégorisme déjà établies. A la notion de classe considérée comme notion fondamentale par elle-même est adjointe la notion de classe dans ses rapports avec la relation d'ordre, puis avec la notion d'opération, ce qui amène à la notion de groupe qui est, après celle de classe et de correspondance, l'une des plus importantes parmi les principes fondamentaux des mathématiques.

Trois chapitres sont consacrés à l'étude historique et logique de la notion de nombre ; d'abord réel, positif, entier puis fractionnaire, irrationnel (à ce sujet l'auteur rappelle le postulat de Dedekind), enfin le nombre négatif et le nombre complexe.

Quoiqu'il soit fait mention de ces nombres à des périodes assez reculées, le nombre négatif, par exemple, se rencontre déjà dans l'ouvrage hindou de Bhaskara en 1150 av. J.-C., ce n'est guère qu'au commencement du XIXe siècle que la vraie nature de ces nombres a été reconnue et que leur théorie a été placée sur une base strictement logique. L'application de la notion de nombre aux diverses opérations conduit l'auteur à l'interprétation géométrique, l'analyse vectorielle et les quaternions.

Dans son 13e chapitre, M. Young abandonne l'algèbre pour s'occuper plus spécialement des principes à la base de la géométrie en se limitant à ce qui concerne la déduction logique des théorèmes de géométrie euclidienne, sans appel à l'intuition. La différence et les rapports entre la géométrie projective et la géométrie métrique sont illustrés par le théorème de Desargues.

L'auteur estime que les groupes de principes fondamentaux répondant le mieux aux exigences de l'instruction élémentaire sont ceux de M. Hilbert et de M. Pieri.

M. Hilbert se base sur une *classe* d'éléments non définis, les points, et ce que l'on peut considérer comme des sous-classes de celle-ci, les droites et les plans. Il divise son groupe de principes en cinq sous-séries, l'alignement, la congruence, l'axiome des parallèles et la continuité.

M. Pieri a comme seuls termes non définis la notion de point et celle de déplacement rigide; il en déduit la définition de la droite, du plan, etc.

Les postulats sur lesquels M. Young base son étude de l'espace à quatre dimensions sont choisis de telle sorte que l'espace à trois dimensions de la géométrie ordinaire n'en est qu'un cas particulier.

Reprenant l'étude de la géométrie et de l'algèbre à la lumière des résultats obtenus, l'auteur conclut que, du point de vue abstrait formel où il se place, les principes constituant l'algèbre ordinaire et la géométrie métrique ordinaire coïncident absolument, l'une contient l'autre. Les notions de variable, de fonction, de limite se déduisent également de ces principes fondamentaux, ainsi que la notion d'infini.

Le volume se termine par une intéressante notice historique de M. U.-G. Mitchell sur le développement du symbolisme algébrique.

R. Masson (Genève).

L. Zoretti. — **Leçons sur le prolongement analytique** professées au Collège de France. — 1 vol. gr. in-8o de VI-116 p. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ces leçons sur le prolongement analytique attachent une importance exclusive à la position du problème ; elles en signalent les difficultés, étudient leur nature et ouvrent de vastes horizons aux chercheurs. La classification des fonctions analytiques, la possibilité de leur prolongement dépendant de l'ensemble de leurs singularités, l'auteur a commencé par rappeler les parties les plus essentielles de la théorie des ensembles. Son objet principal est d'attaquer l'étude des fonctions multiformes en suivant surtout MM. Poincaré et Painlevé. Au fond, c'est l'étude des équations différentielles qui a inspiré ces deux éminents géomètres. Le premier a construit ses fameuses fonctions fuchsiennes qui sont encore des fonctions présentant des propriétés exactes plus ou moins comparables à la périodicité, le second a entrepris l'étude d'équations différentielles sans se soucier de savoir d'avance si les intégrales présenteraient ou non une régularité quelconque et, cependant, ils se sont rejoints, en quelque sorte, ce qui semble prouver que, quelque compliqué que soit l'écheveau des singularités d'une fonction analytique, les tentatives de classification ne sont pas menacées d'un éternel échec.

M. Zoretti paraît essayer de réunir surtout les bases de toutes ces recherches; par instant on aimerait trouver plus de résultats acquis, mais enfin il fait voir le but qu'il dit, lui-même, s'être proposé, celui d'amorcer les questions. A ce point de vue le livre sera loin de manquer d'utilité.

C'est une apologie de plus pour le système de Weierstrass ; les apologistes sont moins nombreux pour Cauchy et Riemann dont les méthodes ne permettent pas d'aller aussi loin sans calculs. Et les travaux que M. Zoretti expose et développe donnent un peu l'impression d'une analyse sans calculs. Je conseillerai volontiers une réaction contre cette tendance, mais ceci ne saurait être une critique ; calculés ou non, bien des résultats sont dus à M. Zoretti lui-même et, pour ceux-ci, il est le premier à demander des perfectionnements qu'il obtiendra sans doute ou que son livre suggérera à d'autres chercheurs. A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Publications périodiques :

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Dr. H. Schotten. — B. G. Teubner, Leipzig.

Jahrgang 42. (1911). — N° 1. — H. E. Timerding : Für und wider die Dreieckskonstruktionen. — Franz Redl : Einfacher Beweis des Gaussschen Satzes vom ebenen Vierseit. Eine neue Winkelhalbierung.

N° 2. — K. Wolletz : Über Systeme von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt. — Karl Brücher : Anschauung in der Arithmetik. — J. Thiede : Über eine propädeutische Behandlung der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten in der Gymnasialprima. — W. Lietzmann : Max Schuster †.

N° 3. — B. G. Teubner, 1811-1911. Festschrift von Felix Müller : Der mathematische Sternenhimmel des Jahres 1811. Rückblicke auf die Mathematik vor hundert Jahren. — Eckhardt : Die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise. — J. Heinrichs : Aufgabe : Dreiecke mit ganzzahligen Seiten anzugeben, so dass $a = n\beta + \gamma$ wird. — J. E. Böttcher : Leicht lesbarer Dauerkalender. — A. Witting : Einige Beweise elementarer planimetrischer Sätze.

N° 4. — B. Hoffmann : Die mathematische Erd- und Himmelskunde in Prima. — A. Schülke : Integralrechnung im Unterricht. — P. Zühlke : Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie. — H. Pfaff : Über Fokalkurven. — Dr. Friedrich von Müller : Welche Mittelschulvorbildung ist für das Studium der Medizin wünschenswert ?

N° 5. — Karl Heinrich Müller : Traugott Müller und sein Einfluss auf die Methode des mathematischen Unterrichts in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. — E. Eckhardt : Neue formen für den ersten sphärischen Kosinussatz und ihre Benutzung zur Ableitung aller Formeln der sphärischen Trigonometrie. — Dr. Diesing : Zur Dreiteilung des Winkels. — Dr. Diesing : Elementare Konstruktion der Parabel aus 4 Punkten $A_1 A_2 A_3 A_4$. — Karl Lademann : Figuren von konstanter Breite. — Josef Schlesinger : Beitrag zur Lehre von der Proportionalität der Linien. Ein Beispiel von Grenzbetrachtung.