RECHERCHE DIRECTE DES RELATIONS DE VARIABLE A FONCTIONS EXISTANT ENTRE LA MESURE D'UN ANGLE ET SES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

Autor(en): **Méray, Gh.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13523

RECHERCHE DIRECTE
DES RELATIONS DE VARIABLE A FONCTIONS
EXISTANT ENTRE LA MESURE D'UN ANGLE
ET SES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

Nous signalons plus loin, dans la « Chronique », *la triste nouvelle de la mort de notre dévoué collaborateur M. Ch. Méray et nous donnerons ultérieurement une notice sur sa vie et sur son œuvre. Cet article de lui était composé depuis le mois d'octobre 1910 et les premières épreuves avaient encore été corrigées par l'auteur lui-même.* LA RÉDACTION.

---

1. — L'idée d'angle, l'idée de cercle, entre lesquelles la structure spéciale commune à tous les instruments goniométriques et leur emploi continuel ont établi en pratique une liaison si étroite, sont, par là, devenus presque inséparables, même en théorie. C'est ainsi que les géomètres ont été amenés à passer par la considération du cercle, inconsciemment semble-t-il, pour arriver aux expressions analytiques des rapports trigonométriques d'un angle variable, en fonction du nombre qui mesure son amplitude relativement à une unité quelconque, expressions dont les Tables trigonométriques conservent les valeurs numériques calculées une fois pour toutes, plus ou moins resserrées, plus ou moins rapprochées.

Effectivement, l'examen de la marche des idées dans cette recherche, montre bientôt qu'elle comporte en substance: 1° l'introduction d'un cercle de rayon égal à l'unité de longueur, rapporté à deux diamètres rectangulaires OX, OY, 2° celle de son angle au centre α porté à partir du demi-axe $\overline{O}$X, égal au proposé en direction comme en grandeur, 3° puis, de l'arc d'origine (1, 0) que cet angle intercepte sur la courbe, 4° le calcul de la longueur s de cet arc, en fonction de l'abscisse de son extrémité, cette abscisse étant ensuite remplacée successivement par les divers rapports trigonométriques de l'angle, à l'aide des transformations courantes, 5° l'inversion des fonctions ainsi obtenues, pour passer aux expressions de ces rapports en fonction de s, 6° l'obtention finale des fonctions $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, ... , par la substitution de α à s faite dans ces fonctions inverses conformément à la proportionnalité mutuelle de ces deux nombres, *établie dès les tout premiers éléments de la Géométrie (par des moyens bien empiriques et précaires).*

Ces vues manquent d'homogénéité et de véritable clarté. Elles cachent effectivement les liens directs, partant serrés, *naturels,* qui existent entre les angles et les segments dont les proportionnalités deux à deux fournissent la notion de leurs rapports trigonométriques, sous la combinaison confuse, *artificielle,* de ceux qu'elles font jeter, du cercle, une figure *courbe,* aux premiers d'une part, aux derniers d'autre part, figures seulement *rectilignes*[1]. Je vais en proposer d'autres, exemptes de ces défauts.

Leur économie générale permet encore (**5**, *inf.*) une forme solide et aisée pour la démonstration de la proportionnalité des arcs d'une circonférence à leurs angles au centre. Outre la faiblesse à laquelle je viens de faire allusion, le mécanisme du raisonnement en usage présente un contraste *unique* et choquant avec les moyens *entièrement différents* qui s'imposeraient dans la recherche, pour toute autre ligne, de la liaison analytique entre un arc et un angle, en semblable dépendance géométrique. Aucun redressement n'est possible dans la théorie que je critique, puisqu'elle a pour base essentielle la proportionnalité, précisément, qui est en question.

2. — En nommant x la mesure d'un angle rectiligne indéterminé, rapporté à une unité quelconque, ce nombre étant

[1] Ces réflexions sont de tous points applicables à la Trigonométrie élémentaire. Elle fait du « cercle trigonométrique » l'objet de références continuelles pour les définitions, l'exposition, les discussions, ... ; elle l'emploie ensuite de la manière la plus forcée à procurer une image (absolument inexacte) du calcul des Tables, le tout au prix de longueurs et d'obscurités, de fréquentes confusions, notamment, entre des segments rectilignes et des nombres abstraits, entre les angles et des arcs de cercle.

revêtu de la qualification positive ou négative selon la direction giratoire attribuée à cet angle, les propriétés courantes de sin x, ... se déduisent directement et rapidement, des définitions, par simples rapports de segments rectilignes, que j'ai employées rudimentairement dans mes *Nouveaux Eléments de Géométrie* (**250**** et suiv.*)[1], puis élargies tout récemment et mises en œuvre dans la mesure de l'essentiel[2].

J'en rappelle les suivantes appartenant au rapport

$$u = \operatorname{tang} x \ , \tag{1}$$

considéré comme fonction de x, que je prends pour pivot de cette Note, et je représenterai par k un multiplicateur entier indéterminé (positif, nul ou négatif), par $\mathfrak{N}$, comme auparavant, la mesure de l'angle neutre (**134***).

I. *Pour toute valeur de* x *étrangère à la progression arithmétique, de raison* $\mathfrak{N}$,

$$\ldots, -\frac{\mathfrak{N}}{2}-2\mathfrak{N}, -\frac{\mathfrak{N}}{2}-\mathfrak{N}, -\frac{\mathfrak{N}}{2}, \frac{\mathfrak{N}}{2}, \frac{\mathfrak{N}}{2}+\mathfrak{N}, \frac{\mathfrak{N}}{2}+2\mathfrak{N}, \ldots, \tag{2}$$

celle de tang x *est assignable, unique en outre. Mais elle ne l'est en aucune de ces quantités exceptionnelles (Cf.* VII, 3°, *inf.).*

II. *Pour les premières valeurs de* x *ci-dessus* (I), *on a les identités numériques*

$$\operatorname{tang}(x + k\mathfrak{N}) = \operatorname{tang} x \ , \tag{3}$$

$$\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x \ , \tag{4}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\mathfrak{N}}{2} \mp x\right) = \pm \frac{1}{\operatorname{tang} x} \ , \tag{5}$$

les deux premières montrent que *la fonction est périodique (Cf.* V, 3°, *inf.),* et qu'*elle est impaire.*

---

[1] Un numéro de renvoi visera ici la 3e édition de cet ouvrage (1906), quand il sera affecté d'un astérisque à droite; la première partie de mes « *Leçons nouvelles sur l'Analyse...* », la deuxième, ... , quand il en portera un, deux, ... , à gauche.

[2] Voir *L'Enseignement mathématique*, N° du 15 janv. 1911, p. 5-16.

III. *On a les égalités numériques*

$$\tag{6} \operatorname{tang}(k\mathfrak{N}) = 0 \ ,$$

$$\tag{7} \operatorname{tang}\frac{\mathfrak{N}}{4} = 1 \ .$$

IV. *Quand* x *croît à l'intérieur de l'intervalle limité par deux termes consécutifs quelconques de la suite* (2), tang x *croît aussi, en passant par* 0 *en même temps que* x *par la demi-somme des limites de l'intervalle.*

Il en est ainsi pour le demi-intervalle $[0, \mathfrak{N} : 2]$ (**251***, V), puis (4) pour le précédent $[-\mathfrak{N} : 2, 0]$, puis (3) pour un quelconque des intervalles entiers considérés.

V. *Pour toute valeur* U *attribuée à* u (1), *et dans chacun des intervalles en question, la résolution par rapport à* x *de l'équation numérique*

$$\tag{8} \mathrm{U} = \operatorname{tang} x$$

donne une racine unique X.

1° Ceci est vrai dans l'intervalle $[-\mathfrak{N} : 2, +\mathfrak{N} : 2]$. Car, pour $\mathrm{U} = 0$, on a la racine $x = 0$ (6); pour $\mathrm{U} = \upsilon > 0$, la construction du n° **254*** fournit une racine ξ comprise entre $0, +\mathfrak{N} : 2$; pour $\mathrm{U} = -\upsilon < 0$, la formule (4) montre immédiatement la racine $-\xi$ comprise entre $-\mathfrak{N} : 2, 0$. Et, dans l'intervalle considéré, aucune quantité $\mathrm{X}' \gtrless \mathrm{X}$ racine dont nous venons de constater l'existence, ne peut vérifier l'équation (8) ; elle donnerait effectivement $\operatorname{tang} \mathrm{X}' \gtrless \operatorname{tang} \mathrm{X}$ (IV), c'est-à-dire $\operatorname{tang} \mathrm{X}' \neq \mathrm{U}$.

2° De cet intervalle, on passe à tout autre au moyen de la relation (3).

3° Les constatations précédentes confèrent le caractère *élémentaire* (****260**) à la période $\mathfrak{N}$ trouvée à la fonction tang x (II).

VI. *En considérant une seconde variable* y, *on a la formule*

$$\tag{9} \operatorname{tang}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{1 \mp \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y} \ ,$$

où les signes supérieurs sont à prendre ensemble, ou bien les *inférieurs* [et qui doit être interprétée conformément aux conventions habituelles en matière de quantités infinies, quand un ou plusieurs termes de la suite (2) s'y trouvent placés sous le signe tang (I), (VII, 3°, *inf.*)].

VII. *La fonction tang* x *est continue en toute valeur de* x *qui n'appartient pas à la suite* (2), *mais infinie en chaque terme de cette suite.*

1° Quand x tend vers 0, et en supposant d'abord positives toutes ses valeurs successives, tang x, finissant alors par rester positive (IV), tend aussi vers 0, valeur de tang 0 (*Ib.*). Car si la valeur de cette fonction ne finissait pas par demeurer inférieure à toute quantité positive donnée υ, il en serait ainsi pour x relativement à ξ, racine unique de l'équation numérique tang $x = \upsilon$ dans l'intervalle $[-\mathfrak{N}:2, +\mathfrak{N}:2]$ (V), positive également, et l'on n'aurait pas lim $x = 0$.

Quand les valeurs successives de x, supposée toujours infiniment petite, sont quelconques, les choses se passent de la même manière, à cause de lim $|x| = 0$ aussi et de $|\text{tang}\, x| = \text{tang}\, |x|$ (4), *(sup.)*.

2° En faisant tendre maintenant x vers une quantité quelconque a étrangère à la suite (2), posant $x - a = h$ quantité infiniment petite, puis substituant $a + h$, a à x, y dans la relation (9) écrite avec les signes inférieurs, il vient

$$(10) \qquad \text{tang}\,(a + h) - \text{tang}\, a = [1 + \text{tang}\,(a + h)\,\text{tang}\, a]\,\text{tang}\, h\ ,$$

où le premier facteur du second membre est fini. Effectivement, on a $|\text{tang}\,(a + h)| < \text{tang}\,(\alpha + \eta)$ à partir du moment où α, η valeurs numériques de a, h conservent une somme inférieure à la valeurs de la moindre des différences existant entre a et les limites de l'intervalle contenant cette quantité (IV). Le premier membre est donc infiniment petit comme le dernier facteur du second (1°). En d'autres termes, on a bien l'égalité lim tang $x = \text{lim tang}\,(a + h) = \text{tang}\, a$.

3° La dernière partie de l'énoncé résulte immédiatement de la combinaison de la constatation préparatoire (1°) avec les relations (3), (5).

VIII. *En considérant un entier positif quelconque* n, *on a*

(sous le bénéfice de l'observation finale de l'énoncé VI)

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tang} nx = \frac{P_n(\operatorname{tang} x)}{Q_n(\operatorname{tang} x)} ,$$

où $P_n(\operatorname{tang} x)$, $Q_n(\operatorname{tang} x)$ *sont des polynômes entiers en* $\operatorname{tang} x$, *sans diviseur commun, et de degrés effectifs* n, n — 1 *quand le nombre* n *est impair,* n — 1, n *quand il est pair.*

3. — *En posant, pour abréger,*

$$\text{(12)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \Pi > 0 , \qquad (\text{II}, 4^o, inf.)$$

la fonction considérée (1) *est l'intégrale de l'équation différentielle*

$$\text{(13)} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}(1 + u^2)$$

complétée par la condition initiale

$$\text{(14)} \qquad u = 0 , \quad pour \quad x = 0 .$$

Nos énoncés n'ayant à viser aucune quantité imaginaire, *la réalité de celles dont nous parlerons demeurera partout sous-entendue* [1].

I. Supposée olotrope pour toutes les valeurs (réelles) de x, sauf les termes de la suite (2) où ceci n'est pas possible (**2**, VII), cette fonction est douée de dérivées dans tout ce domaine (***155** *et suiv.*), et, divisée par h, la relation (10) donne, pour $\lim h = 0$,

$$\text{(15)} \qquad \operatorname{tang}' a = \lim \frac{\operatorname{tang}(a+h) - \operatorname{tang} a}{h} \qquad (^*\mathbf{196})$$
$$= \operatorname{tang}' 0 (1 + \operatorname{tang}^2 a) ,$$

à cause de $\lim \operatorname{tang}(a+h) = \operatorname{tang} a$, $\lim (\operatorname{tang} h : h) = \operatorname{tang}' 0$.

---

[1] Le cas actuel est de ceux où les moyens indiqués aux nos *****118** et suiv. dispensent du recours aux imaginaires.

Or cette égalité équivaut à une équation différentielle de la forme (13), puisque a est une valeur quelconque attribuée à x dans le domaine qui vient d'être défini.

D'autre part, la constante $\operatorname{tang}' 0$ ne peut être nulle, sans quoi, d'après l'équation (13), $\operatorname{tang} x$ le serait identiquement, ce qui n'a pas lieu. Elle est positive parce que $\operatorname{tang} h$ finit par conserver le signe de h (IV). Quant à la condition (14), elle ne diffère pas de l'égalité exacte $\operatorname{tang} 0 = 0$ (6).

II. *L'équation différentielle*

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \tag{16}$$

et la condition initiale (14) *définissent une fonction intégrale, restant olotrope à l'intérieur de tout intervalle limité par deux termes consécutifs de la progression arithmétique*

$$\ldots, -\frac{\Pi}{2} - 2\Pi, \frac{\Pi}{2} -, \Pi - \frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} + \Pi, \frac{\Pi}{2} + 2\Pi, \ldots, \tag{17}$$

mais devenant méromorphe seulement, en chacune de ces valeurs particulières, qui est un infini simple pour cette fonction (****29**), (****33**).

1° La propriété, pour le second membre de l'équation (16), d'être un polynôme entier en x, u, par suite une fonction indéfiniment olotrope de ces deux variables considérées un instant comme mutuellement indépendantes, écarte toute intégrale singulière et dote cette équation d'une intégrale ordinaire répondant à toute condition initiale donnée

$$u = u_0, \qquad \text{pour} \qquad x = x_0, \tag{18}$$

restant olotrope aussi longtemps que finie (***381**, II). On peut donc partir de (18) pour construire le premier développement d'une intégrale de ce genre, que nous représentons par $\mathrm{T}(x)$.

Cette fonction est toujours croissante, puisque la valeur de sa dérivée, fournie par le second membre de (16) est essentiellement positive.

On constatera sans difficulté que les relations ultimes attachées à l'équation (16) (*290) sont de la forme

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \mathrm{U}_m(u) \quad ,$$

où l'expression $\mathrm{U}_m(u)$ est un polynôme de degré $m+1$, en u seulement, dont les coefficients sont tous réels, celui de u^i étant $\gtreqless 0$, selon que l'entier $m+i$ est pair ou impair.

Quand $u_0 = 0$, cette observation assigne au premier développement de $\mathrm{T}(x)$ la forme à remarquer

$$(19) \qquad \mathrm{T}(x) = u_0^{(1)}(x - x_0) + u_0^{(3)}(x - x_0)^3 + \dots ,$$

dont tous les termes effectifs sont de degrés impairs, avec des coefficients positifs.

2° *Deux constantes ayant été représentées par* c, C, *on aura des intégrales de l'équation* (16) *en prenant les fonctions*

$$\begin{aligned}
\Theta_c(x) &= \mathrm{T}(c + x) \; , \\
\Theta_-(x) &= -\mathrm{T}(-x) \; , \\
\Theta_{c,\mathrm{I}}(x) &= \pm \mathrm{T}(c \mp x)^{-1} \; , \\
\Theta_{\mathrm{C}}(x) &= \frac{\mathrm{C} + \mathrm{T}(x)}{1 - \mathrm{CT}(x)} \; ,
\end{aligned}$$

(sous la condition naturelle, que l'existence de l'intégrale originaire T soit certaine pour les valeurs dont les fonctions simples $c + x$, $-x$, $c \mp x$ sont susceptibles).

Car on trouvera successivement, sans difficulté,

$$\begin{aligned}
\Theta'_c(x) &= \mathrm{T}'(c + x) = 1 + \mathrm{T}(c + x)^2 = 1 + \Theta_c(x)^2 \quad (16) \; , \\
\Theta'_-(x) &= \mathrm{T}'(-x) = 1 + \mathrm{T}(-x)^2 = 1 + \Theta_-(x)^2 \; , \\
\Theta'_{c,\mathrm{I}}(x) &= \frac{\mathrm{T}'(c \mp x)^2}{\mathrm{T}(c \mp x)^2} = \frac{1 + \mathrm{T}(c \mp x)^2}{\mathrm{T}(c \mp x)^2} = 1 + \Theta_{c,\mathrm{I}}(x)^2 \; , \\
\Theta'_{\mathrm{C}}(x) &= \frac{(1 + \mathrm{C}^2)\mathrm{T}'(x)}{[1 - \mathrm{CT}(x)]^2} = \frac{(1 + \mathrm{C}^2)[1 + \mathrm{T}(x)^2]}{[1 - \mathrm{CT}(x)]^2} = 1 + \Theta_{\mathrm{C}}(x)^2 \; ,
\end{aligned}$$

ce qui était à vérifier.

3° Les attributions numériques $x_0 = u_0 = 0$ faites dans $\mathrm{T}(x)$ conduisent à l'intégrale de l'équation (16) qui correspond à la condition (14) et que nous représenterons par $\mathfrak{T}(x)$. En même temps qu'elle, nous considérerons la fonction x de u, inverse de $\mathfrak{T}$, racine de l'équation finie

$$(20) \qquad u = \mathfrak{T}(x) \ ,$$

sous la condition initiale

$$(21) \qquad x = 0 \ , \qquad \text{pour} \qquad u = 0 \ ,$$

intégrale, en conséquence, de l'équation

$$(22) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{1 + u^2}$$

assistée de la même condition initiale (14).

Dans le domaine entier des valeurs (réelles) de u, cette nouvelle fonction est olotrope parce qu'il en est ainsi pour le second membre de (22), (*208), réelle parce que tels sont les coefficients de son premier développement, ceux de tous les subséquents visiblement, ensuite, sans cesse croissante parce que la valeur de sa dérivée, savoir du second membre précité, est essentiellement positive. La fonction x ne figurant pas dans ce second membre, sa valeur est fournie par la formule générale

$$(23) \qquad x = \int_0^u \frac{d\upsilon}{1 + \upsilon^2} \ ,$$

où il est commode de régler le calcul de l'intégrale définie en faisant passer υ de 0 à u par une marche de sens constant.

Tout ceci montre immédiatement que x est encore une fonction impaire de u, toujours du signe de cette variable.

4° En faisant u infinie, positivement d'abord, négativement ensuite, on trouve

$$\lim x = \pm \Lambda \ ,$$

où Λ désigne une quantité positive.

Dans le premier cas, u peut être supposée en croissance constante à partir de 0, partant x avec elle (3°), et, dès qu'elle devient supérieure à quelque constante positive a, la formule (23) donne

$$0 < x = \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_a^u \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} < \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_a^{+\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} < \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \frac{1}{a},$$

à cause de $1 : (1+\upsilon^2) < 1 : \upsilon^2$ (*38).

De là, résulte l'existence des intégrales définies et relations mutuelles ci-après :

$$\Lambda = \int_0^{+\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = -\int_0^{-\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \frac{\Pi}{2} > 0,$$

moyennant la définition (12).

Il faut noter l'égalité

$$\mathfrak{T}\left(\pm\frac{\Pi}{4}\right) = \pm 1. \tag{24}$$

L'une des précédentes donne effectivement

$$\frac{\Pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2};$$

la substitution $\upsilon = 1 : \varphi$, d'où $\varphi = 1 : \upsilon$, conduit à

$$\int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = -\int_1^0 \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2};$$

il en résulte aussitôt

$$\frac{\Pi}{4} = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2}, \tag{25}$$

puis la première des égalités (24) en question, à cause de la relation (23) qui entraîne (20) généralement.

Et pareillement pour l'autre (3°, *in fine*).

5° On voit ainsi, que, u venant à croître de $-\infty$ à $+\infty$, x traitée en fonction implicite de u, croît de $-\Pi:2$ à $+\Pi:2$;

on en conclut qu'inversement (**11), u, ramenée maintenant à son rôle primitif de fonction de x, passera de $-\infty$ à $+\infty$ par croissance incessante, quand x marchera de $-\Pi:2$ à $+\Pi:2$ dans un sens constant.

Dans l'intervalle entier

$$\left[-\frac{\Pi}{2}, \quad +\frac{\Pi}{2}\right], \tag{26}$$

notre intégrale $\mathfrak{T}(x)$ existe donc, olotrope dans son intérieur (1°), mais infinie en ses extrémités. On peut ajouter qu'elle est méromorphe en chacune de ces dernières.

D'après ce qui vient d'être dit, la fonction composée $\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2}-x\right)$ est effectivement définie pour

$$-\frac{\Pi}{2} \leqq \frac{\Pi}{2} - x \leqq +\frac{\Pi}{2},$$

inégalités équivalentes à

$$0 \leqq x \leqq \Pi,$$

c'est-à-dire dans l'intervalle entier

$$[0, \quad \Pi]. \tag{27}$$

Elle, son inverse arithmétique, par suite, et $\mathfrak{T}(x)$ le seront donc dans l'intervalle partiel

$$\left[0, \quad \frac{\Pi}{2}\right] \tag{28}$$

que (26), (27) comprennent à la fois, et où l'on a ainsi l'identité

$$\mathfrak{T}(x) = \frac{1}{\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2}-x\right)}, \tag{29}$$

parce que les deux membres sont des intégrales de l'équation (16) (2°), dont les valeurs en $x=\Pi:4$, savoir $\mathfrak{T}(\Pi:4)$, $1:\mathfrak{T}(\Pi:4)$, sont toutes deux $=1$ (24).

Pour des valeurs de x suffisamment voisines de $\Pi:2$ à l'intérieur de l'intervalle partiel (28), la formule (19) donne, par la substitution de 0, $\Pi : 2 - x$ à x_0, x,

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right) = u_0^{(1)}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right) + u_0^{(3)}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)^3 + \dots ,$$

d'où, en vertu de (29) et à cause de $u_0^{(1)} \neq 0$,

$$(30) \quad \mathfrak{T}(x) = -\frac{1}{u_0^{(1)}}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right)^{-1} + \mathrm{u}^{(1)}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right) + \mathrm{u}^{(3)}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right)^3 - \dots ,$$

développement méromorphe en $x = \Pi : 2$, ayant cette quantité pour infini simple (****33**).

Et semblablement, pour ce qui se passe en $x = -\Pi : 2$.

6° L'intervalle (26) étant enclos par des valeurs singulières, la série de Taylor est impuissante au calcul de notre intégrale en dehors de lui. Mais sa deuxième extrémité, par exemple, peut être franchie au moyen du développement (30), ou, ce qui revient au même, de la formule (29), dont le second membre est connu dans l'intervalle (27), extrémités comprises (5°), qui étend en conséquence la définition de $\mathfrak{T}(x)$ jusqu'à $x = \Pi$, inclusivement.

7° En $x = \Pi$, on trouve de cette manière $\mathfrak{T}(x) = 0$ et olotrope, parce que $\Pi : 2 - x$ prend la valeur $-\Pi : 2$ rendant $\mathfrak{T}(\Pi : 2 - x)$ infinie et méromorphe (5° *in fine*), et le développement de Taylor, reprenant sa validité, donne

$$\mathfrak{T}(x) = u_0^{(1)}(x - \Pi) + u_0^{(3)}(x - \Pi)^3 + \dots ,$$

pour des valeurs de x suffisamment voisines de Π (1°).

Repartant de là et procédant comme ci-dessus (5°), (6°) presque textuellement, on poussera le calcul de $\mathfrak{T}(x)$, de $x = \Pi$ à $x = 2\Pi$, puis de $x = 2\Pi$ à $x = 3\Pi$, ... , et ainsi de suite. On recommencera semblablement, de $x = 0$ à $x = -\Pi$, puis de $x = -\Pi$ à $x = -2\Pi$, ... , et l'existence de notre intégrale se trouvera établie dans tout le domaine des valeurs réelles de x.

8° On a identiquement

$$(31) \qquad \mathfrak{T}(x + k\Pi) = \mathfrak{T}(x) .$$

Les calculs expliqués tout à l'heure (5° *et suiv.*) donnent en particulier l'égalité

$$\mathfrak{T}(k\Pi) = 0 \,, \tag{32}$$

en vertu de laquelle les deux membres de cette relation, qui sont des intégrales de l'équation (16) (2°), ont, en $x = k\Pi$, des valeurs initiales $= 0$, l'une et l'autre.

En d'autres termes, la fonction $\mathfrak{T}(x)$ admet la quantité Π pour période, et celle-ci est élémentaire (****260**). Car, à l'intérieur de l'intervalle (26) d'amplitude Π où elle est olotrope (5), sa croissance constante (1°) l'empêche de prendre des valeurs égales pour des valeurs inégales de x, ce qui aurait évidemment lieu, si elle admettait quelque période $< \Pi$, numériquement.

9° On a de même

$$\mathfrak{T}(-x) = -\mathfrak{T}(x) \,. \tag{33}$$

Car les fonctions $-\mathfrak{T}(-x)$, $\mathfrak{T}(x)$ sont des intégrales de l'équation (16) (2°), qui prennent encore la même valeur 0, pour $x = 0$.

10° A présent, un peu d'attention suffit pour apercevoir l'exactitude complète de notre énoncé préparatoire II.

III. *Les identités* (9), (11) *ont lieu littéralement pour* $\mathfrak{T}(\mathrm{x})$ *substituée à tang* x, *en même temps que la suite* (17) *à* (2).

L'exactitude de la relation

$$\mathfrak{T}(x \pm y) = \frac{\mathfrak{T}(x) \pm \mathfrak{T}(y)}{1 \mp \mathfrak{T}(x)\mathfrak{T}(y)} \tag{34}$$

est assurée par le fait, que (II, 2°) ses deux membres sont des intégrales de l'équation (16), dont les valeurs en $x = 0$ se confondent l'une et l'autre avec $\pm \mathfrak{T}(y)$ (32).

L'autre identité

$$\mathfrak{T}(nx) = \frac{\mathrm{P}_n(\mathfrak{T}(x))}{\mathrm{Q}_n(\mathfrak{T}(x))} \tag{35}$$

se tire de (34), maintenant établie, par les mêmes moyens que (11) de (9).

IV. L'intégrale de l'équation (13) mentionnée dans notre énoncé principal est la fonction

$$\mathfrak{t}(x) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right) , \tag{36}$$

car, avec $\mathfrak{t}(0) = \mathfrak{T}(0) = 0$, il vient immédiatement

$$\mathfrak{t}'(x) = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\mathfrak{T}'\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right) = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\left[1 + \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right)^2\right] \qquad (16)$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}[1 + \mathfrak{t}(x)^2] ,$$

et l'exactitude de l'identité

$$\operatorname{tang} x = \mathfrak{t}(x) \tag{37}$$

reste seule à prouver.

1° On aperçoit immédiatement que la simple substitution de $\mathfrak{N}$ à Π dans les principaux énoncés des alinéas II, III concernant $\mathfrak{T}(x)$ les étend à $\mathfrak{t}(x)$.

2° A cause de

$$\mathfrak{t}(k\mathfrak{N}) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}k\mathfrak{N}\right) = \mathfrak{T}(k\Pi) = 0 , \qquad (32)$$

$$\mathfrak{t}\left(\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{4}\right) = 1 , \qquad (24)$$

et de (6), (7), l'identité (37) est vérifiée numériquement pour $x = k\mathfrak{N}$, $x = \mathfrak{N} : 4$.

(Sous les conventions habituelles) elle l'est encore pour $x = \mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}$, quantités composant la suite (2), puisque $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}) = \mathfrak{T}(\Pi : 2 + k\Pi)$ (36) y est infinie (II, 5°, 8°) comme $\operatorname{tang} x$ (**2,** VII, 3°).

3° Un entier positif quelconque ayant été désigné par ν, les ν quantités positives

$$x_i = \frac{\mathfrak{N} : 4}{\nu} + i\frac{\mathfrak{N}}{\nu} = \frac{4i + 1}{4\nu}\mathfrak{N} , \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1) ,$$

forment une suite croissante, toutes sont $< \mathfrak{N}$ parce qu'il en est ainsi pour la dernière $[(4\nu - 3) : 4\nu]\mathfrak{N}$, et, en nommant I le plus grand entier inférieur à la fraction $(2\nu - 1) : 4$, celles d'entre elles qui composent le groupe

$$x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\,,\ x_{\mathrm{I}}$$

sont comprises entre 0, $\mathfrak{N} : 2$ exclusivement, les autres

$$x_{\mathrm{I}+1}\,,\ \ldots\,,\ x_{\nu-1}$$

entre $\mathfrak{N} : 2$, $\mathfrak{N}$ exclusivement encore; on s'en assurera sans difficulté.

Combinés avec la croissance de tang x, négative entre $\mathfrak{N} : 2$, $\mathfrak{N} : 2 + \mathfrak{N}$, puis positive entre 0, $\mathfrak{N} : 2$ (**2**, IV), ces observations entraînent les inégalités

$$\text{(38)}\qquad \operatorname{tang} x_{\mathrm{I}+1} < \operatorname{tang} x_{\mathrm{I}+2} < \cdots < \operatorname{tang} x_{\nu-1} < 0 < \operatorname{tang} x_0 < \operatorname{tang} x_1 < \cdots < \operatorname{tang} x_{\mathrm{I}}\,.$$

Comme, d'autre part, $\operatorname{tang} \nu x_i = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4 + i\mathfrak{N}) = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4) = 1$ (3), (7), les quantités tang x_i sont les ν racines de l'équation entière en u, de degré ν,

$$\text{(39)}\qquad \mathrm{P}_\nu(u) - \mathrm{Q}_\nu(u) = 0$$

provenant de (11) par la substitution de ν, $1 = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4)$, u à n, tang nx, tang x, et les inégalités (38) montrent que tangx_0 $= \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ est la moindre de toutes les positives.

Un raisonnement identique, mais basé maintenant sur les propriétés de la fonction $\mathfrak{t}(x)$ (1°), prouve que $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ est pareillement la plus petite des racines positives de la même équation (39). De tout ceci on conclut

$$\text{(40)}\qquad \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{N}}{4\nu} = \mathfrak{t}\left(\frac{\mathfrak{N}}{4\nu}\right).$$

4° En considérant un second entier positif μ quelconque, on a encore

$$\text{(41)}\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\mu}{\nu}\,\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}\left(\frac{\mu}{\nu}\,\frac{\mathfrak{N}}{4}\right).$$

Car il y a identité entre les formules tirées de (11) et (35) pour exprimer, au moyen de $\operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ et $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 4\nu)$, quantités égales (40), les deux membres de (41), respectivement.

5° Une valeur positive quelconque de x ($\neq \mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}$) étant actuellement considérée, puis faisant tendre la fraction indéterminée $\mu : \nu$ vers $4x : \mathfrak{N}$, on trouvera

$$\lim \operatorname{tang}\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{4x}{\mathfrak{N}}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \operatorname{tang} x\ ,$$

$$\lim \mathfrak{t}\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}\left(\frac{4x}{\mathfrak{N}}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}(x)\ ,$$

parce que les fonctions tang, $\mathfrak{t}$ sont continues (**2**, VII), (1°), (II), puis la relation (37) pour cette valeur de x, à cause de l'égalité permanente (41).

Finalement, les identités (4), (33) étendent aux valeurs négatives de la variable, la relation (37) établie maintenant pour ses valeurs positives.

4. — Les relations algébriques fournies par la Géométrie élémentaire entre tang x et les autres rapports trigonométriques de l'angle x (**251***, II, III) ramènent présentement la théorie de tous, en tant que fonctions de cette variable, à de simples combinaisons *algébriques,* faites entre elles et l'intégrale de l'équation fondamentale (13).

Il est remarquable qu'ainsi, toutes ces fonctions, *rencontrées en Géométrie* pourtant, soient olotropes (en dehors de circonstances exceptionnelles assignables à priori), *analytiques,* au sens de la redondance généralement préférée. C'est une constatation de la grande règle attendant encore un démenti, que les séries entières sont aptes à représenter toutes les fonctions dont la considération n'est pas un jeu d'esprit stérile.

5. — *Les longueurs des arcs d'une même circonférence sont proportionnelles aux amplitudes de leurs angles au centre.*

Soient r le rayon de cette circonférence, α l'amplitude d'un angle au centre variable, s la longueur de l'arc $m_0 m$ intercepté par lui sur elle, puis x, y les coordonnées de m

rapporté à deux demi-diamètres rectangulaires dont le premier passe par m_0 et

(42) $$x^2 + y^2 = r^2$$

l'équation de la courbe.

En prenant y pour variable indépendante, on obtient facilement

(43) $$\frac{ds}{dy} = \frac{r}{x} ,$$

à cause de

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad (****25)$$

et de (42) donnant

(44) $$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} , \qquad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} .$$

On trouve encore

(45) $$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\mathfrak{N}}{\Pi}\frac{1}{x}$$

à cause de

(46) $$\text{tang } \alpha = \frac{y}{x} ,$$

d'où, par différentiation,

$$\frac{d \text{ tang } \alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) : x^2 ,$$

relation que les substitutions (13), (46), (44) réduisent à

$$\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\alpha}{dy} = \frac{x^2 + y^2}{x^3} .$$

De (43), (45) on déduit

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} r \frac{d\alpha}{dy} ,$$

puis, en intégrant dans les conditions données, $s = \alpha = 0$, pour $y = 0$,

$$s = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} r\alpha \,, \tag{47}$$

ce qui est la proportionnalité énoncée.

6. — Par définition, la longueur de la circonférence est celle de l'arc intercepté sur elle par l'angle au centre replet (**137***, II), ayant $2\mathfrak{N}$ pour mesure. En la représentant par C, l'attribution de cette valeur $2\mathfrak{N}$, faite à α dans la relation précédente, donne

$$C = \Pi \,.\, 2r \,.$$

D'après cette égalité, le nombre Π introduit dans nos spéculations par des considérations exclusivement analytiques (12), se trouve avoir pour représentation géométrique, le rapport de la longueur d'une circonférence quelconque à celle de son diamètre, que la lettre π désigne universellement.

En même temps, la formule (23), essentielle à la théorie précédente, est précisément celle dont le développement en série, la combinaison avec son cas particulier (25), et certains artifices procurés par les relations (34), (35), fournissent les moyens les plus avantageux pour le calcul pratique de ce nombre.

7. — L'adoption pour angle unité, de celui qui assigne la mesure Π[$= \pi$ (**6**)] à l'angle neutre, savoir de l'angle au centre qui, d'après la relation (47), intercepte un arc de longueur r sur la circonférence de rayon r, de mesure 1 sur celle, par exemple, dont le rayon est égal à l'unité de longueur (ceci rappelé pour les esprits qui voient un dogme dans l'immixtion du cercle à l'arithmétique des angles), fait disparaître, en le réduisant à 1, le multiplicateur $\Pi : \mathfrak{N}$ qui s'est montré si souvent dans nos calculs, dans les équations (13), (47) notamment. Ce choix simplifie donc sensiblement, non pas certes les formules élémentaires de la Trigonométrie, mais celles de ses régions supérieures, qui contiennent les rapports trigonométriques en combinaisons *algébriques* avec des mesures d'angles (construction des Tables, etc.).

Sous le régime d'une unité d'angle quelconque, on trouve, par exemple,

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \operatorname{tang}' 0 (1 + \operatorname{tang}^2 x) \tag{15}$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}(1 + \operatorname{tang}^2 x) \tag{13}$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} \frac{1}{\cos^2 x},$$

résultat bien inférieur en commodité, à la formule courante

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

mais qui la reproduit par le choix précité. Et pareillement, pour les autres rapports trigonométriques, avec des complications plus grandes encore quand il s'agit de dérivées d'ordres supérieurs.

Ces observations analytiques semblent apporter au règlement de l'unité d'angle qui domine les calculs de la Trigonométrie supérieure (les formules élémentaires aussi, mais abusivement) une justification motivée qui lui manquait encore.

Ch. MÉRAY (Dijon).