CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX EN UN POINT D'UNE QUADRIQUE

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX EN UN POINT D'UNE QUADRIQUE

La construction du centre de courbure d'une conique et celle des centres de courbure principaux d'une quadrique ont donné lieu à diverses recherches ; MANNHEIM, notamment, a consacré plusieurs Mémoires à ces constructions de centres de courbure et le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1882 contient un Mémoire d'un grand intérêt *Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux* (pp. 167-172).

Je me propose de montrer comment on peut construire les centres de courbure des coniques et des quadriques par application d'un théorème de STEINER, d'un théorème dû à VALSON et enfin d'une propriété que j'ai énoncée incidemment dans un Mémoire récent *Sur les surfaces de M. Appell.* Ayant fait quelques remarques relatives aux théorèmes de STEINER et de VALSON, je profiterai de l'occasion pour les signaler à l'attention des lecteurs.

Sous le n° 1002, STEINER proposa, à titre de question dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la démonstration du théorème suivant : *Si en un point d'une ellipse, on prend sur la normale en dehors de la courbe une longueur égale au rayon de courbure en ce point, le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle orthoptique de l'ellipse*. Cette question fut résolue en 1871 (*Nouvelles Annales*, pp. 460-462) par LEZ et par GÉRONO qui en donna une solution géométrique ; les *Nouvelles Annales* de 1872 (note du bas de la page 429) contiennent une application du théorème de STEINER, indiquée incidemment par MATHIEU dans une *Note sur l'ellipse*.

Ce théorème de STEINER m'a semblé avoir plus d'intérêt qu'une simple question à résoudre et mériter quelques recherches.

Considérons deux coniques (C) et (c) tangentes en un point O; soient N et n les centres de courbure respectifs de ces coniques au point O. La condition pour que la conique (C) soit harmoniquement circonscrite à la conique (c) se met sous la forme géométrique suivante :

$$nO + 2 . ON = 0 .$$

Ce théorème général contient le théorème de STEINER, comme cas particulier : il suffit d'envisager le cas où (C) est un cercle et d'appliquer, à ce cercle (C) et à la conique (c), le théorème bien connu de STEINER-FAURE. Ce fut probablement de cette manière que Steiner dût obtenir le théorème, dont il proposa ensuite la démonstration.

Je ferai observer que le théorème de Steiner est une propriété qui caractérise les coniques. Cherchons, en effet, à déterminer une courbe plane (M) par la condition que, M étant un point quelconque de (M), N étant le centre de courbure de (M) en M et N′ le symétrique de N par rapport à M, le cercle de diamètre NN′ soit orthogonal à un cercle fixe (ou à une droite fixe). L'équation différentielle du second ordre obtenue est celle des coniques qui admettent le cercle donné pour cercle orthoptique (ou des paraboles qui admettent la droite pour directrice).

Le cercle fixe peut avoir son rayon nul : on obtient alors pour courbe (M) une hyperbole équilatère concentrique au cercle de rayon nul : c'est là une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère.

L'une des plus intéressantes applications du théorème de Steiner semble être la construction du centre de courbure d'une conique. Le cercle orthoptique de la conique étant donné, ainsi qu'un point de la conique et la tangente en ce point, on sait construire élémentairement le cercle orthogonal au cercle orthoptique, passant par le point et y admettant la tangente imposée. Le centre de courbure s'en déduit immédiatement. Cette méthode si simple n'exige aucun effort de mémoire et présente l'avantage de ne faire intervenir que très peu de lignes qui d'ailleurs ont chacune une interprétation géométrique remarquable : le cercle tangent à une courbe et dont un diamètre est symétrique du rayon de courbure est, en effet, le lieu des centres des hyperboles équilatères qui admettent un contact du troisième ordre avec la courbe envisagée.

Après les nombreuses remarques qui ont été faites depuis longtemps relativement aux centres de courbure des coniques, une construction nouvelle n'offre pas un très grand intérêt. Il n'en est pas de même des constructions des centres de courbure principaux de surfaces, sujet qui a été fort peu étudié. Voici une construction des centres de courbure des quadriques à centre, que l'on obtient par application simultanée de deux théorèmes. Cette construction diffère essentiellement de celle de MANNHEIM, qui fait intervenir les axes de l'indicatrice.

Je rappellerai tout d'abord un théorème remarquable donné par VALSON, dans sa Thèse : *Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la Géométrie de l'ellipsoïde* (Paris, 1854) ; soit l'ellipsoïde de demi-axes a, b, c ; ϖ désigne la distance du centre O au plan tangent au point où la courbure totale est $\frac{1}{\mathrm{RR}'}$. VALSON énonce le théorème suivant : *La courbure totale d'une quadrique est constante en tous les points de contact des plans tangents à la quadrique et à une sphère concentrique* et elle est donnée par la relation suivante :

$$\varpi^4 \,.\, \mathrm{RR}' = a^2 b^2 c^2 \,.$$

Depuis VALSON, ce théorème a été retrouvé par divers auteurs ; on en trouve une démonstration dans les *Lezioni di geometria differenziale* de L. BIANCHI.

La propriété précédente ne caractérise pas les quadriques ; elle appartient aux surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (en coordonnées ordinaires) :

$$rt - s^2 = \frac{(px + qy - z)^4}{a^2 b^2 c^2} .$$

Une des surfaces intégrales les plus remarquables est l'hyperboloïde cubique : dans les *Nouvelles Annales* de 1855, ROBERTS signale précisément cette équation aux dérivées partielles comme satisfaite par l'hyperboloïde cubique. En se reportant à diverses Communications *Sur une nouvelle classe de surfaces* de M. TTITZEICA à l'Académie des Sciences de Paris, on observera que les surfaces déterminées et étudiées par M. TTITZEICA ne sont autres que celles qui jouissent de la propriété précédente (Séances des 10 juin et 9 décembre 1907 et du 27 janvier 1908).

Le théorème de VALSON fournit donc une expression du produit des rayons principaux de courbure en tout point d'une quadrique à centre. Si, par un procédé quelconque, on obtient une expression de la somme des rayons principaux, on connaîtra les centres principaux : il suffira de construire deux longueurs connaissant leur somme et leur produit.

Pour avoir une interprétation géométrique de la formule qui donne la somme des rayons principaux de courbure d'une quadrique, il n'y a qu'à généraliser le théorème de STEINER de la façon suivante. Soit une quadrique à centre, un ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

pour fixer les idées ; ϖ désignant la distance du centre O au plan tangent au point M de coordonnées x, y, z, tout point P de la normale a des coordonnées de la forme

$$x + \lambda\varpi \frac{x}{a^2} , \quad y + \lambda\varpi \frac{y}{b^2} , \quad z + \lambda\varpi \frac{z}{c^2} ;$$

écrivons que la sphère de centre P et de rayon PM $= \lambda$ est orthogonale à la sphère orthoptique de la quadrique ; nous obtenons :

$$2\lambda\varpi + x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 ,$$

ou

$$2\lambda = -(\mathrm{R} + \mathrm{R}') ;$$

P est donc le symétrique par rapport à M du point moyen de la normale en M (du milieu du segment dont les extrémités sont les centres de courbure principaux). Ainsi, *si l'on se donne un point* M *d'une quadrique, le plan tangent en ce point et la sphère de Monge, on peut construire le milieu du segment dont les extrémités sont les centres de courbure principaux : ce point est le symétrique par rapport à* M *du centre de la sphère orthogonale à la sphère de Monge et qui, passant par le point* M, *touche en ce point le plan tangent imposé.*

La propriété précédente ne caractérise pas les quadriques ; dans mon Mémoire *Sur les surfaces de M. Appell* (pp. 152 et 153 des *Nouvelles Annales* de 1910), j'ai signalé l'équation générale des surfaces qui jouissent de cette propriété. Considérées comme enveloppes du plan

$$(u+v)X + i(v-u)Y + (uv-1)Z = (uv+1)\varpi ,$$

ces surfaces sont intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1+uv)^2\left(\varpi \cdot \frac{\partial^2\varpi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial\varpi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varpi}{\partial v}\right) + 3\varpi^2 - k^2 = 0 ,$$

K désignant le rayon de la sphère fixe. Posant alors

$$\varpi^2 = 2\varpi' + \frac{1}{3}k^2 ,$$

cette équation se transforme en

$$(1+uv)^2 \frac{\partial^2\varpi'}{\partial u \partial v} + 6\varpi' = 0 ;$$

celle-ci, qui représente des surfaces de M. Goursat particulières, est une équation linéaire dont l'invariant h_2 est nul et qui, par suite, s'intègre par application de la méthode de Laplace.

E. Turrière (Alençon).