

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1911)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ESQUISSE D'UNE TRIGONOMÉTRIE DÉBARRASSÉE DE L'INTRUSION DES ARCS DE CERCLE  
**Autor:** Méray, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13518>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ESQUISSE D'UNE TRIGONOMÉTRIE

DÉBARRASSÉE DE L'INTRUSION DES ARCS DE CERCLE

---

1. — L'attribution d'un caractère obligatoire à l'intervention du cercle dans l'assiette des principes de la Trigonométrie est une vue très ancienne, puisque les noms de *sinus*, *tangente*, *sécante*, ... d'ARC SIN, ... sont portés depuis un temps immémorial par les « *lignes trigonométriques* », par leurs fonctions inverses, et ce sentiment semble toujours fortement enraciné, car l'exhibition minutieuse du « *cercle trigonométrique* » inaugure tous les livres, tous les cours sur la matière, et, plus haut, le nombre  $\pi$ , rapport de la circonférence au diamètre, reste mêlé intimement aux considérations conduisant d'une manière ou d'une autre à la construction des Tables.

Cependant, il ne s'agit en réalité que des angles *rectilignes* et des *rappports* mutuels de segments *rectilignes* rattachés à ceux-ci par des constructions employant la *règle* et l'*équerre* seulement, rapports dont les valeurs numériques sont déterminées ainsi par celles des angles qu'elles déterminent inversement (sauf ambiguïté à lever), et rien de tout cela ne touche évidemment à la notion d'une figure *courbe* quelconque. L'opinion dont il s'agit est donc une pure illusion<sup>1</sup>, voilant comme toujours le fond des choses, ajoutant des complications inutiles à leur exposition. D'autre part, la

---

<sup>1</sup> Le préjugé a dû naître du fait, que tous les instruments destinés à la mesure *physique* des angles ont pour principe la substitution à ceux-ci, d'arcs proportionnels sur un même cercle matériel, procédé indirect qui apporte des facilités extraordinaires à la construction de ces instruments, comme à la lecture de leurs indications. Mais les besoins de la *pratique* n'ont rien à voir à l'économie des *théories*. A cette occasion, d'ailleurs, il n'est pas hors de propos de rappeler que cette application du cercle est une simple commodité, *nullement une nécessité* : à la rigueur, on pourrait fort bien, par exemple, rapporter les angles à des échelles *rectilignes* (dont les divisions seraient espacées suivant des lois convenables).

Géométrie classique s'obstinait à éviter comme une souillure la moindre allusion aux considérations trigonométriques, se privant par là des moyens expéditifs et puissants qu'elle y aurait souvent trouvés, et sa prudence, son exclusivisme archaïque, étaient à demi couverts, en cette circonstance, parce qu'il y a de laborieux et d'encombrant dans le déchiffrement du « cercle trigonométrique », par la confusion que son emploi provoque et entretient longtemps parfois, entre ses arcs et des angles, entre des segments rectilignes en dépendance avec lui et des rapports numériques.

Ces réflexions m'ont amené jadis à la conviction qu'il était possible d'arracher la Trigonométrie à ce parasitisme du cercle, par simple retour à la considération directe des angles et des rapports précités, et qu'il importait de le faire pour la simplifier et mettre ainsi ses ressources à la portée de la Géométrie élémentaire. C'est la réforme que j'ai amorcée dans mon livre de 1874, que j'ai tant soit peu élargie dans son édition de 1903<sup>1</sup> et poussée dans celle de 1906<sup>2</sup>, jusqu'aux formules pour la résolution logarithmique des triangles, obtenues par les moyens les plus vulgaires.

Sur cette voie, où je n'ai eu à faire encore que des pas petits et peu nombreux, on peut marcher avec la même aisance jusqu'au bout. Je vais le montrer sommairement, présenter notamment une démonstration puisée à la même source, pour les formules générales concernant l'addition et la soustraction des angles, d'où, une fois établies, le reste de la Trigonométrie (courante) se déduit rapidement, sans difficultés spéciales.

La rectification préalable des arcs de cercle ne s'impose pas plus impérieusement dans la recherche des relations analytiques existant entre les angles *eux-mêmes* et leurs rapports trigonométriques, relations dont quelques-unes jouent déjà un très grand rôle en Mathématiques spéciales (dérivées de  $\sin x$ , ...., discussion des figures rapportées à des coordon-

<sup>1</sup> Cette innovation, je le rappelle en passant, figure parmi celles de mon ouvrage, que les Programmes officiels de 1905 se sont appropriées. (V. *Revue scientifique*, n° du 24 août 1907.)

<sup>2</sup> *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Dijon, Paul Jobard. Mes renvois à cette édition se feront ici par des numéros affectés d'un astérisque.

nées polaires, etc.), où le calcul pratique des Tables a trouvé sa base rationnelle. Mais la question est d'un ordre plus élevé qui jurerait avec le terre à terre des considérations suivantes. Je la traiterai donc séparément dans un article qui suivra bientôt celui-ci.

2. — Je raisonnerai sur des figures tracées toutes dans un même plan; comme pour des segments rectilignes, la même notation sera affectée à un angle (figure) et à la mesure de son amplitude rapportée à quelque unité choisie à volonté; jusqu'au n° 9, VI (*inf.*), je ne considérerai que des angles *absolus*, c'est-à-dire sans qualification positive ou négative. Je continuerai à représenter par  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{O}$ , l'angle neutre, le replet<sup>1</sup> et le droit, liés les uns aux autres par les égalités

$$(1) \quad 2\mathcal{N} = \mathcal{R} = 4\mathcal{O}.$$

Et je commencerai par approprier à des amplitudes quelconques, les définitions d'où je suis parti en traitant des angles aigus ou droits seulement, au point de vue où je reste placé (250\* *et suiv.*).

I. Pour tout angle AOB, de côtés  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  quelconques ainsi que son amplitude  $x$ , je nommerai *directeur* relatif à l'un  $\overline{OA}$  de ceux-ci, le demi-plan  $\overline{OA}b$  qui a pour arête la droite OA de ce côté et contient, soit la totalité de l'angle s'il est saillant (133\*), soit, au cas que son amplitude atteigne ou surpasse celle du neutre, le premier  $AOb_1$  (au moins) des angles saillants  $AOb_1$ ,  $b_1Ob_2$ , ...,  $b_iOb$  qui ont concouru à sa composition (136\*, IV).

Nous désignerons ensuite par  $m$  un point indéterminé de l'autre côté  $\overline{OB}$ , pris toutefois ailleurs qu'au sommet O, par  $a$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $m$  sur la droite OA du premier, puis nous considérerons les nombres  $am : Om$ ,  $Oa : Om$ , rapports des segments  $am$ ,  $Oa$  à  $Om$ , qui sont

<sup>1</sup> Ces deux noms que j'ai donnés aux plus petits des angles ayant pour côtés des demi-droites opposées dans le premier cas, confondues dans le second (l'angle nul étant excepté pour celui-ci), ont été parfois taxés de fantaisies néologiques. Je n'en persiste pas moins à croire tout à fait irrationnelle l'habitude courante de rapporter à l'angle droit ces amplitudes angulaires aux rôles si importants, dont la notion est tout ce qu'il y a de plus étranger à celle de *perpendicularité*.



toujours déterminés parce que leur dénominateur commun  $Om$  est supposé  $\neq 0$ , en outre visiblement indépendants de la position de  $m$  sur  $\overline{OB}$ .

II. Quand le côté  $\overline{OB}$  ne se trouve pas appliqué sur la droite  $OA$ , le premier rapport  $am : Om$  n'est pas nul, et, en le revêtant de la qualification positive ou négative selon que ce côté tombe ou non dans le demi-plan directeur mentionné ci-dessus (I), on obtient une quantité (algébrique) qui est, par définition, le *sinus* de l'angle considéré, se notant  $\sin AOB$ . En cas d'application, le même nombre a pour valeur 0, qui (considéré algébriquement toujours) est encore celle de  $\sin AOB$ .

III. Le second rapport  $Oa : Om$  revêtu, soit de la qualification positive ou négative selon que le point  $a$  se trouve sur le côté  $\overline{OA}$  ou sur son prolongement, soit du caractère du zéro algébrique, quand  $a$  est en  $O$ , définit semblablement le *cosinus* de notre angle et se représente par  $\cos AOB$ .

IV. La mobilisation d'un dédoublement ...  $AOB$  ... du plan de nos figures, emportant tout ce que nous y avons tracé, puis sa réapplication sur ce plan, faite de manière à amener  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  en  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OA}$  respectivement, conduisent aux égalités  $\sin BOA = \sin AOB$ ,  $\cos BOA = \cos AOB$  montrant que les quantités visées par les définitions précédentes ne sont modifiées en rien par la transposition des côtés de l'angle et qu'on peut, en conséquence, les noter plus simplement  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

V. Si l'on considère la demi-droite  $\overline{O\alpha}$  perpendiculaire à  $\overline{OA}$  dans le directeur de l'angle  $AOB$  relatif à  $\overline{OA}$  (I) et un angle  $\alpha OB$  ayant le demi-plan  $\overline{O\alpha A}$  pour directeur relatif à  $\overline{O\alpha}$ , on apercevra immédiatement la réciprocité exprimée par les égalités

$$(2) \quad \sin AOB = \cos \alpha OB, \quad \cos AOB = \sin \alpha OB.$$

3. — Jusqu'au n° 9, VI *inf.*, la lettre  $k$  représentera un entier absolu en complète indétermination (s'étendant à la valeur 0), sous la seule condition que sa grandeur rende possibles les soustractions éventuelles.

Pour toutes les valeurs de  $x$ , on a les relations alternatives

$$(3) \quad \sin(x + k\mathcal{D}) = \cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x,$$

$$(4) \quad \cos(x + k\mathcal{D}) = -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

quand la division de  $k$  par 4 donne les restes 1, 2, 3, 0 respectivement, et

$$(5) \quad \sin(x - k\mathcal{D}) = -\cos x, \quad -\sin x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$

$$(6) \quad \cos(x - k\mathcal{D}) = \sin x, \quad -\cos x, \quad -\sin x, \quad \cos x,$$

en correspondance respective avec les mêmes restes.

I. Si l'on construit un angle droit  $AO\mathcal{A}$ , puis un angle  $\overline{\mathcal{A}OB}$  d'amplitude  $x$ , en contiguïté extérieure avec lui par le côté commun  $\overline{O\mathcal{A}}$ , un certain autre  $AOB$ , de directeur  $\overline{O\mathcal{A}\mathcal{A}}$  relativement à  $\overline{OA}$ , sera d'amplitude  $\mathcal{D} + x$  (136\*, V), et l'on aura (2, II, III)

$$\sin(x + \mathcal{D}) = \sin AOB, \quad \cos(x + \mathcal{D}) = \cos AOB.$$

Les égalités (2)

$$\sin AOB = \cos \mathcal{A}OB, \quad \cos AOB = \sin \mathcal{A}OB$$

peuvent être réécrites pour cet angle  $AOB$  et l'angle annexe  $\mathcal{A}OB$  défini au n° 2, V, de mêmes notations et relation graphique que ceux du lieu cité, et l'on a d'autre part

$$\cos \mathcal{A}OB = \cos \overline{\mathcal{A}OB} = \cos x, \quad \sin \mathcal{A}OB = -\sin \overline{\mathcal{A}OB} = -\sin x,$$

parce que les angles  $\mathcal{A}OB$ ,  $\overline{\mathcal{A}OB}$  sont de mêmes côtés  $\overline{O\mathcal{A}}$ ,  $\overline{OB}$ , avec des directeurs relatifs à  $\overline{O\mathcal{A}}$  qui sont visiblement opposés.

De tout quoi, on conclut immédiatement

$$(7) \quad \sin(x + \mathcal{D}) = \cos x, \quad \cos(x + \mathcal{D}) = -\sin x,$$

conformément à ce que donnent pour  $k = 1$ , les relations (3), (4) en question.

II. L'addition successive de  $\mathcal{D}$ ,  $2\mathcal{D}$ , ...,  $(k - 1)\mathcal{D}$  aux angles des premiers membres de (7), puis des combinaisons immédiatement visibles des équations ainsi obtenues, conduisent aux formes générales de (3), (4).

III. Finalement (I), on a  $\sin x = \sin [(x - \mathcal{O}) + \mathcal{O}] = \cos (x - \mathcal{O})$  et, de même,  $\cos x = -\sin (x - \mathcal{O})$ , c'est-à-dire

$$\sin (x - \mathcal{O}) = -\cos x, \quad \cos (x - \mathcal{O}) = \sin x,$$

relations d'où l'on passera à (5), (6) comme nous l'avons fait à l'instant (II) de (7) à (3), (4), sauf à substituer ici la soustraction de  $\mathcal{O}$ ,  $2\mathcal{O}$ , ... aux additions de tout à l'heure.

4. — On notera les cas particuliers de (3), (4), (5), (6),

$$(8) \quad \sin (x \pm k\mathcal{U}) = (-1)^k \sin x, \quad \cos (x \pm k\mathcal{U}) = (-1)^k \cos x,$$

$$(9) \quad \sin (x \pm k\mathcal{R}) = \sin x, \quad \cos (x \pm k\mathcal{R}) = \cos x,$$

que donnent le doublement et le quadruplement de l'entier  $k$  (1).

5. — Il faut encore remarquer les égalités

$$(10) \quad \begin{cases} \sin (k\mathcal{U}) = \cos (\mathcal{O} + k\mathcal{U}) = 0, \\ \cos (k\mathcal{U}) = \sin (\mathcal{O} + k\mathcal{U}) = (-1)^k, \end{cases}$$

conséquences de  $\sin 0 = \cos \mathcal{O} = 0$  (2, II, III), de  $\sin \mathcal{O} = \cos 0 = 1$ , évidemment, et des relations (8).

6. — On a ces autres relations alternatives

$$(11) \quad \sin (k\mathcal{O} - x) = \cos x, \quad \sin x, \quad -\cos x, \quad -\sin x,$$

$$(12) \quad \cos (k\mathcal{O} - x) = \sin x, \quad -\cos x, \quad -\sin x, \quad \cos x,$$

quand la division de  $k$  par 4 donne les restes 1, 2, 3, 0.

I. Un angle d'amplitude  $(4\chi + 1)\mathcal{O} = \chi\mathcal{R} + \mathcal{O}$  a pour côtés deux demi-droites  $\overline{OA}$ ,  $\overline{O\mathcal{A}}$  en perpendicularité mutuelle, et son directeur relatif au premier est le demi-plan  $\overline{OA\mathcal{A}}$ . Si, en contiguïté intérieure avec cet angle par le côté  $\overline{O\mathcal{A}}$ , on place en  $\mathcal{A}OB$  un second angle d'amplitude  $x$ , quelque troisième angle  $AOB$ , de directeur  $\overline{OA\mathcal{A}}$  relatif à son côté  $\overline{OA}$ , sera l'excès du premier des précédents sur l'autre (136\*, V), savoir  $(4\chi + 1)\mathcal{O} - x$ . On en conclut

$$(13) \quad \sin [(4\chi + 1)\mathcal{O} - x] = \cos x, \quad \cos [(4\chi + 1)\mathcal{O} - x] = \sin x,$$

à cause des égalités (2) entre des angles notés et placés relativement comme AOB,  $\alpha$ OB ici.

II. De (13) on passe à (11), (12) aussi facilement que de (7) à (3), (4) plus haut (3, II).

7. — Les cas particuliers des formules (11), (12) qui correspondent aux restes 1, 2, 0 sont intéressants et peuvent s'écrire

$$(14) \quad \sin(k\mathcal{R} + \mathcal{O} - x) = \cos x, \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{O} - x) = \sin x,$$

$$(15) \quad \sin(k\mathcal{R} + \mathcal{N} - x) = \sin x, \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{N} - x) = -\cos x,$$

$$(16) \quad \sin(k\mathcal{R} + \mathcal{R} - x) = -\sin x, \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{R} - x) = \cos x,$$

8. — *La considération de deux angles quelconques x, y conduit à*

$$(17) \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$(18) \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

*où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, ainsi que les inférieurs.*

I. 1° Quand chacun des angles  $x, y, x + y$  est compris entre 0 et  $\mathcal{N}$  exclusivement, la première des relations (17) s'obtient facilement. Il existe effectivement (230\*) quelque triangle déchevêtré, d'angles  $x, y, z = \mathcal{N} - (x + y)$ , avec des côtés respectivement opposés  $a, b, c$ , pour lequel nos définitions (2, II, III) mises en jeu par les moyens les plus élémentaires donnent

$$c = a \cos y + b \cos x,$$

$$\frac{c}{\sin z} = \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y},$$

puis, par des combinaisons évidentes,

$$\sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

finalemeut, la formule en question

$$(19) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

à cause de  $\sin z = \sin[\mathcal{N} - (x + y)] = \sin(x + y)$  (15).

2° Pour les mêmes valeurs de  $x$ ,  $y$ , la validité de la formule (19) s'étend à toutes celles  $> \mathcal{N}$  de leur somme correspondante.

Les angles  $\mathcal{N} - x$ ,  $\mathcal{N} - y$  et leur somme  $\mathcal{R} - (x + y)$  remplissant toutes les conditions ci-dessus (1°), on trouvera successivement et facilement

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= -\sin[\mathcal{R} - (x + y)] = -\sin[(\mathcal{N} - x) + (\mathcal{N} - y)] \\ &= -[\sin(\mathcal{N} - x)\cos(\mathcal{N} - y) + \cos(\mathcal{N} - x)\sin(\mathcal{N} - y)] \\ &= -[\sin x(-\cos y) + (-\cos x)\sin y] \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (16), (19), (15). \end{aligned}$$

3° La même formule (19) reste exacte pour  $x = 0$  quel que soit  $y$ , ou pour  $y = 0$  quel que soit  $x$ , ou bien encore pour  $x + y = \mathcal{N}$  quels que soient  $x$ ,  $y$ . C'est ce que montre immédiatement la réalisation successive de ces trois hypothèses numériques, avec prise en considération des égalités (10) donnant  $\sin 0 = \sin \mathcal{N} = 0$ ,  $\cos 0 = 1$  et des relations (15) comprenant, quand  $x + y = \mathcal{N}$ ,  $\sin y = \sin(\mathcal{N} - x) = \sin x$ ,  $\cos y = \cos(\mathcal{N} - x) = -\cos x$ .

4° Elle subsiste pour  $x = x_0 + k\mathcal{N}$ ,  $y = y_0 + l\mathcal{N}$ , quand elle a lieu pour  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . Car ces substitutions conduisent à

$$\begin{aligned} (-1)^{k+l} \sin(x_0 + y_0) &= (-1)^k \sin x_0 (-1)^l \cos y_0 + \\ &\quad (-1)^k \cos x_0 (-1)^l \sin y_0 \quad (8) \end{aligned}$$

ce qui est exact par hypothèse.

5° Elle s'étend à toutes les valeurs de  $x$ ,  $y$ . Car, si  $k$ ,  $l$  et  $\xi$ ,  $\eta$  sont les quotients et les restes des divisions de  $x$ ,  $y$  par  $\mathcal{N}$ , opérées par défaut, elle est vraie pour  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  à cause de  $\xi < \mathcal{N}$ ,  $\eta < \mathcal{N}$  (1°), (2°), (3°), puis, par suite (4°), pour  $x = \xi + k\mathcal{N}$ ,  $y = \eta + l\mathcal{N}$ .

II. La relation (17) avec les signes inférieurs se déduit de l'autre reproduite séparément en (19), par l'intervention d'un multiple de  $\mathcal{R}$ , savoir  $k\mathcal{R}$ , pris  $> y$ . On trouvera effectivement

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin(x - y + k\mathcal{R}) = \sin[x + (k\mathcal{R} - y)] \\ &= \sin x \cos(k\mathcal{R} - y) + \cos x \sin(k\mathcal{R} - y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (9), (19), (16) \end{aligned}$$

III. En recourant enfin à un angle auxiliaire d'amplitude  $k\mathcal{R} + \mathcal{O}$ , pris  $> (x + y)$ , les formules (17), maintenant établies dans tous les cas, donneront facilement

$$\begin{aligned} \cos (x \pm y) &= \sin [k\mathcal{R} + \mathcal{O} - (x \pm y)] = \sin [(k\mathcal{R} + \mathcal{O} - x) \mp y] \\ &= \sin (k\mathcal{R} + \mathcal{O} - x) \cos y \mp \cos (k\mathcal{R} + \mathcal{O} - x) \sin y \\ &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned} \quad (14), (17),$$

c'est-à-dire les relations (18) restant à établir.

9. — Les indications suivantes résument ce qui me reste à dire.

I. Les diverses formules revues précédemment procurent l'extension à toutes les valeurs du nombre  $x$ , des propriétés de  $\sin x$ ,  $\cos x$  mentionnées aux n<sup>os</sup> 251\* et suivants, pour les angles non  $> \mathcal{O}$ , celle notamment des résultats de leur discussion limitée à ce premier intervalle.

II. De ces résultats combinés avec les égalités (10), on conclut que les seules racines des équations

$$\begin{aligned} \sin x = 0, \quad \sin x = +1, \quad \sin x = -1, \\ \cos x = 0, \quad \cos x = +1, \quad \cos x = -1, \end{aligned}$$

sont les nombres inscrits dans les cases correspondantes du Tableau semblable

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{lll} k\mathcal{N}, & \mathcal{O} + k\mathcal{R}, & \mathcal{O} + \mathcal{N} + k\mathcal{R}, \\ \mathcal{O} + k\mathcal{N}, & k\mathcal{R}, & \mathcal{N} + k\mathcal{R}, \end{array} \right.$$

III. On discutera et résoudra comme il suit les équations numériques

$$(21) \quad \sin x = \mathfrak{s}, \quad \cos x = c,$$

dont les seconds membres sont des quantités algébriques données.

1°  $|\mathfrak{s}| > 1$ . La discussion de  $\sin x$  (I) montre que la première est impossible.

2°  $\mathfrak{s} = 0, +1, -1$ . Les racines de la même équation ont été données dans les cases correspondantes du Tableau (20).

3°  $0 < |\mathfrak{s}| < 1$ . La construction graphique d'un triangle

rectangle  $Oam$  (2, I, II) où le rapport d'un côté  $am$  de l'angle droit à l'hypoténuse  $Om = |\xi|$  est possible (244\*, III) et procure, par l'angle opposé à ce côté  $am$ , ou par cet angle augmenté de  $\mathcal{N}$ , selon que  $s \geq 0$  (8), une racine  $\sigma$  de cette équation, dont l'intervention amène celle-ci sous la forme

$$(\sin x - \sin \sigma =) 2 \sin \frac{x - \sigma}{2} \cos \frac{x + \sigma}{2} = 0 \quad (17), (18),$$

la décompose ainsi en ces deux autres

$$\sin \frac{x - \sigma}{2} = 0, \quad \cot \frac{x + \sigma}{2} = 0,$$

qui viennent d'être résolues (II).

4° Et pareillement pour la seconde des équations (21).

IV. On fera la théorie de  $\tan x$ ,  $\cos x$  dans le même ordre d'idées, en prenant pour définitions les formules

$$(22) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

qui trouvent dans la figure expliquée au n° 2 des représentations géométriques évidentes; et, par de simples calculs, on développera les conséquences de leurs combinaisons variées avec celles qui expriment les propriétés de  $\sin x$ ,  $\cos x$  (3 et suiv.).

V. Les signes  $\sec x$ ,  $\operatorname{cosec} x$  ne sont à mentionner qu'en passant, par la commodité accidentelle, mais bien rare et minime, de leur substitution à  $1 : \cos x$ ,  $1 : \sin x$ .

VI. Les quantités  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ , considérées comme des fonctions du nombre  $x$ , se trouvent actuellement définies pour toutes les valeurs (absolues) de celui-ci. Ces définitions s'étendent immédiatement aux valeurs *qualifiées* de  $x$  (positives, négatives), par les conventions suivantes. Après avoir représenté par  $+\xi$ ,  $-\xi$  comme d'habitude, la quantité absolue quelconque  $\xi$  revêtue successivement du caractère positif et du négatif, il suffira de poser

$$\sin (\pm \xi) = \pm \sin \xi, \quad \cos (\pm \xi) = \cos \xi,$$

d'où (22)

$$\tan (\pm \xi) = \pm \tan \xi, \quad \cot (\pm \xi) = \pm \cot \xi.$$



Par une revue rapide de toutes nos formules antérieures, on constatera bien facilement la persistance de leur validité dans ces circonstances comportant même des valeurs et qualifications quelconques données aux multiplicateurs entiers tels que  $k$ .

Et l'occasion sera particulièrement convenable pour faire ressortir les commodités procurées par l'imposition de la qualification positive ou négative aux mesures des angles qui, dans un plan commun, sont *dirigés*, soit dans quelque même sens giratoire, soit dans le sens opposé (155\*).

(On peut opérer cette extension dès le début et la poursuivre au fur et à mesure de l'entrée de nos formules en scène, et ceci les simplifierait un peu, en les généralisant du coup. Mais il n'y aurait pas d'inconvénients à la passer sous silence, car elle ne commence qu'en mathématiques spéciales à être réellement utile, les signes  $\sin$ ,  $\cos$ , ... qui concourent à la solution des équations élémentaires (figures *algébriques*) ne portent pour ainsi dire jamais que sur des angles absolus, même saillants.)

VII. Comme pour le calcul de  $\pi$  et des logarithmes auparavant, les détails donnés dans l'enseignement *secondaire* sur la construction des Tables trigonométriques, sont inutiles à tous les points de vue, éducatif et autres, autant qu'ils sont arides et fastidieux, même trompeurs. Car les procédés sur lesquels les élèves sont ainsi condamnés à pâlir sont de pures fantaisies, sans intérêt historique, et ils ne donnent pas la moindre idée de la méthode rationnelle qui a été réellement appliquée, qu'approfondiront, avec fruit cette fois, les sujets appelés à des études mathématiques un peu plus élevées. Ce serait bien assez de montrer *en très peu de mots, chose des plus faciles*, la possibilité de calculs de ce genre, en théorie seulement, c'est-à-dire abstraction faite de leur valeur pratique et de la manière de les conduire pour s'assurer une approximation de degré donné.

Ici, l'emploi des formules

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$



réitéré à partir de  $x = \mathcal{O}$  (cas où  $\cos \mathcal{O} = 0$  est connu) jusqu'à  $x = \mathcal{O} : 2^n$  et complété par des considérations très simples, ne ferait intervenir que des extractions de racines carrées (avec des opérations entières) dans la construction théorique, pour des angles échelonnés entre 0 et  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{O} : 2^n$  en  $\mathcal{O} : 2^n$ , c'est-à-dire par degrés de petitesse arbitraire, d'une Table de sinus et cosinus naturels, immédiatement extensible aux tangentes et cotangentes des mêmes angles. A quoi, l'on ajouterait l'indication des *parties proportionnelles* pour le passage à d'autres angles, à ceux en particulier qui proviennent de la division sexagésimale ou décimale de l'angle droit.

Cet expédient didactique n'a pas pour principe, comme celui des cours, une idée aussi étrange que celle de rattacher le calcul préalable des rapports trigonométriques d'un angle très petit à la métrique des *lignes courbes*, parfois des *aires*, et, tout compte fait, son exposition se ferait en quelques minutes, le monceau des calculs nécessaires à sa mise en nombres (si l'on pouvait y songer) serait sans doute bien moins pesant. Mais il serait infiniment plus sage d'émonder l'enseignement de toutes les questions aussi oiseuses et rebutantes que celle-ci.

Ch. MÉRAY (Dijon).

---