LE PROBLÈME DE PAPPUS

Une question récente de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (Question 3667, R-C. ARCHIBALD), ramène l'attention sur ce célèbre problème :

Rhombo dato, et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

Pappus, et après lui un certain nombre de mathématiciens, parmi lesquels Newton, Huygens, Gergonne, ont donné une solution algébrique et géométrique qui dépend de la construction de deux lignes de différence et de produit connus [1].

Le problème plus général : *Mener par un point donné dans un angle une sécante de longueur donnée,* a été à son tour l'objet d'un certain nombre de recherches, auxquelles je crois devoir apporter ici ma contribution. La solution complète de ce problème général est donnée algébriquement par une équation du troisième ou du quatrième degré, graphiquement par l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole. Outre le rhombe, il y a d'autres cas particuliers dans lesquels le degré s'abaisse au deuxième. Il existe également un cas particulier qui conduit à une trisection d'angle.

Le point donné A étant supposé placé dans l'angle XOY, soit BAC (fig. 1), la sécante demandée de longueur l ; menons la sécante DAE dont A est le milieu, puis OA′ équipollent à AD, et OM équipollent à CB ; le point M est à l'intersection du cercle qui a O pour centre et l pour rayon avec l'hyperbole qui a pour centre A′, les asymptotes parallèles à OX et OY, et qui passe aussi par O. Le point M étant construit, il ne restera qu'à tirer la droite BAC parallèle à OM.

[1] Consulter, par exemple, E. PRUVOST, *Géométrie Analytique*, t. I, p. 18–28.

Bien des méthodes s'offrent pour la recherche du point M, car on peut prendre par exemple pour inconnues soit les sécantes communes au cercle et à l'hyperbole, soit un angle fixant la direction de OM, soit encore un rapport ou une coordonnée homographique, telle que $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CE}}$, etc... Chaque méthode vaut d'ailleurs la peine d'être suivie, car elle révèle un fait intéressant.

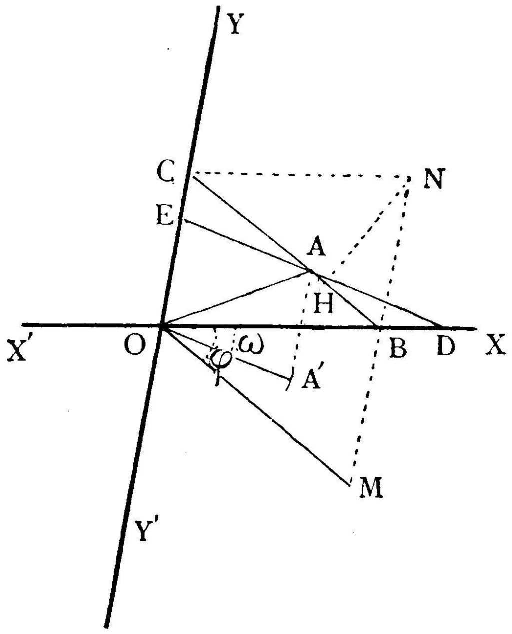

Fig. 1.

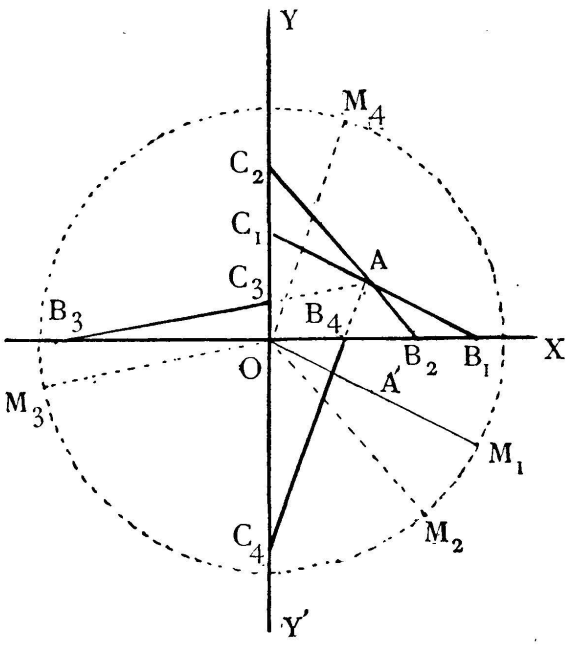

Fig. 2.

Prenons les côtés de l'angle XOY $= \theta$ pour axes de coordonnées; en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées de A, x_1 et $-y_1$ sont celles de A', le cercle et l'hyperbole ont respectivement pour équations

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - l^2 = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{x_1}{x} - \frac{y_1}{y} - 1 = 0\,. \tag{2}$$

Pour que la conique du faisceau linéaire

$$2xy + 2y_1x - 2x_1y + \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - l^2) = 0$$

dégénère en deux droites, il faut que λ soit racine de l'équation du troisième degré

$$l^2\sin^2\theta\lambda^3 - 2l^2\cos\theta\lambda^2 + (x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - l^2)\lambda + 2x_1y_1 = 0\,, \tag{3}$$

qui a ses trois racines réelles quand on a la condition

$$(4)\qquad \left\{ 3(\overline{OA}^2 \sin^2\theta - l^2) - l^2\cos^2\theta \right\}^3 + l^2 \left\{ 8l^2\cos^3\theta - 9\overline{OA}^2 \sin^2\theta\cos\theta - 27x_1y_1\sin^4\theta \right\}^2 < 0 .$$

Cette condition exprime que le point donné A est à l'intérieur d'une sextique à quatre rebroussements, tangente deux fois à chacun des axes.

Lorsque $\theta = 90°$, cette sextique n'est autre que l'hypocycloïde à quatre rebroussements, ou *astroïde*,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - l^{\frac{2}{3}} = 0 .$$

Lorsque θ est quelconque, la sextique (4) est aussi l'enveloppe de toute corde BAC égale à l limitée par l'angle, en même temps que le lieu géométrique de la projection H sur cette corde du quatrième sommet N du parallélogramme OBNC. Mais elle jouit encore d'une autre propriété curieuse (Joachimstal, Salmon, Merlieux, — consulter, par exemple, Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, vol. 1, p. 332-338).

Soient oz bissectrice de l'angle XOY, OX' et OY' les deux droites qui font avec oz de part et d'autre des angles de 45°, R le rayon constant du cercle circonscrit au triangle OBC; si l'on détermine l'astroïde enveloppe des cordes de longueur 2R inscrites dans l'angle droit X'OY', la sextique (4) est une courbe parallèle à cette astroïde, à la distance $R\cos\theta$, les rebroussements des deux courbes se correspondant mutuellement.

Pour déterminer le point M par un angle, nous cherchons l'angle $XoM = \varphi$. En désignant par ω l'angle xoA', l'équation à résoudre est alors

$$(5)\qquad \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin(\theta - \varphi)} + \frac{\sin\omega}{\sin\varphi} - \frac{l}{OA'} = 0 .$$

Dans le cas particulier où $l = 2OA'$, elle se décompose en

$$\sin\frac{\varphi - \omega}{2} = 0 , \qquad \text{et} \qquad \sin\left[\frac{3\varphi + \omega}{2} - \theta\right] + \sin\frac{\varphi - \omega}{2}\cos\theta = 0 .$$

Par conséquent, si l'angle XOY est droit, l' étant égal à $2OA' = 2OA$, les quatre points communs au cercle et à l'hyperbole sont M_1 situé sur le prolongement de OA', M_2 tel que $XOM_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}XOM_1$, et les deux autres sommets M_3, M_4 du triangle équilatéral inscrit à partir de OM_2. De là les quatre sécantes B_1AC_1, B_2AC_2, B_3C_3 et B_4C_4, dont la première a pour milieu A (fig. 2).

Soit enfin dans la figure 1 le rapport $\frac{CO}{CE} = t$. Les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{2tx_1}{1+t}, \qquad y = \frac{2ty_1}{1-t},$$

et en les substituant dans l'équation (1) on calculera t par l'équation du quatrième degré

$$(6) \qquad 4\left\{ x_1^2(t-1)^2 + y_1^2(t+1)^2 - 2x_1y_1\cos\theta(t^2-1) \right\} t^2 - l^2(t-1)^2 = 0 .$$

En y faisant

$$\theta = 2\alpha, \quad l = 2l', \quad A = (x_1 - y_1)\cos\alpha, \quad B = (x_1 + y_1)\sin\alpha,$$

$$t_1 = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}, \qquad t_2 = \frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1},$$

cette équation pourrait s'écrire sous la forme

$$(6') \qquad \left\{ A^2(t-t_1)^2 + B^2(t-t_2)^2 \right\} t^2 - l'^2(t^2 - t_1t_2)^2 = 0,$$

qui se prête assez bien à la discussion. On voit, par exemple, qu'elle a toujours au moins deux racines réelles, une positive, une négative, entre -1 et $+1$. Quand OA' est inférieur ou égal à l', les deux autres racines sont aussi réelles, l'une étant inférieure à -1 et la quatrième supérieure à 1. Il n'y a donc vraiment incertitude que lorsque OA' est plus grand que l'.

Or, l'équation (6) développée a la forme

$$(7) \qquad Mt^4 + 2Nt^3 + Pt^2 - l'^2 = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$M = \overline{OA'}^2 - l'^2 \ , \quad N = y_1^2 - x_1^2 = - OA \ . \ OA' \cos AOA' \ ,$$
$$P = \overline{OA}^2 + 2l'^2 \ ,$$

et si l'on calcule le résultant Δ de cette équation avec l'équation dérivée,

$$2Mt^2 + 3Nt + P = 0 \ ,$$

la condition de réalité de ses quatre racines, qui s'exprime par

$$\Delta \leqslant 0 \ ,$$

revient, tous calculs développés, à l'inéquation (4).

Il faut maintenant examiner les cas particuliers que peut offrir l'équation (7), c'est-à-dire ceux où elle est quadratique. Le premier est celui, évident, où $N = 0$, A étant situé sur la bissectrice interne de l'angle XOY, et A′ sur celle de l'angle adjacent. L'équation (7) est alors bicarrée en t, et donne

$$2 \text{ solutions si } l' < OAtq\alpha \ ,$$
$$4 \quad \text{»} \quad \text{si } l' > OAtq\alpha \ .$$

Pour les construire aisément, traçons (fig. 3) $BC = l$, et le segment capable de l'angle aigu θ sur BC ; E étant le milieu de l'arc mineur sous-tendu, construisons deux lignes de différence égale à OA et de produit égal à $\overline{EB}^2$; puis de E comme centre avec chacune de ces lignes pour rayon décri-

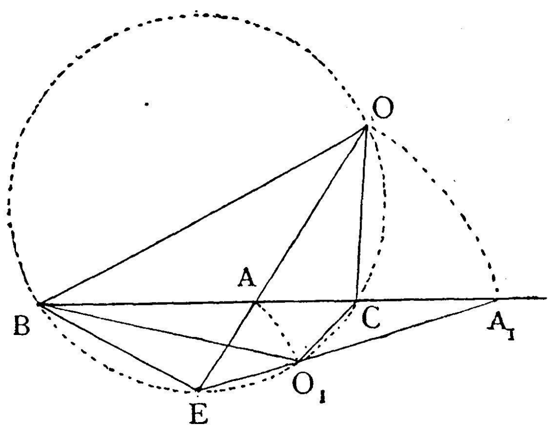

Fig. 3.

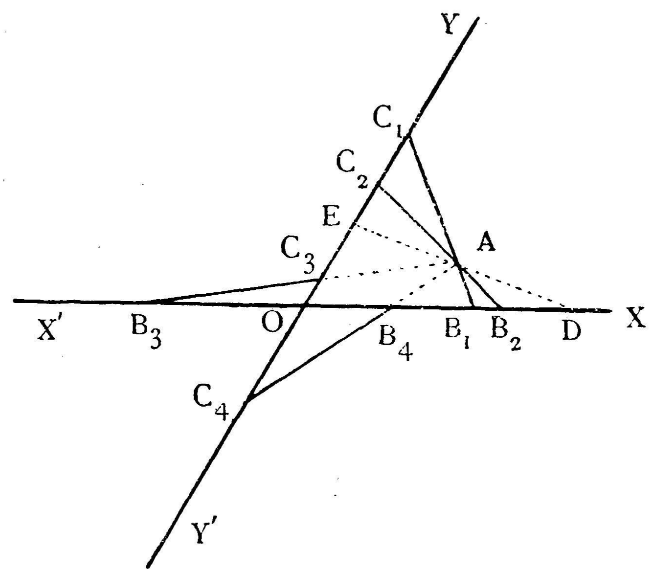

Fig. 4.

vons deux arcs de cercle; le premier coupe toujours BC en A_1, le second la coupe en A si $l > 2OA \operatorname{tg} \alpha$; alors, les droites EA_1 et EA rencontrant le cercle en O_1 et O, les longueurs OB, OC, prises sur les côtés de l'angle déjà donné θ, les longueurs O_1B, O_1C, prises sur les côtés de son supplément déterminent les extrémités des sécantes de longueur l qui passent par le point donné.

L'équation (7) devient quadratique dans une autre circonstance intéressante, celle où

$$N^2 - PM = 0 .$$

Elle se décompose alors en deux équations du second degré,

$$Nt^2 + Pt + l'\sqrt{P} = 0 , \tag{8}$$

$$Nt^2 + Pt - l'\sqrt{P} = 0 . \tag{9}$$

Pour fixer les idées, soit $x_1 > y_1$; l'équation (8) a deux racines réelles de signe contraire comprises entre -1 et $+1$; elles correspondent aux points d'intersection réels de la branche d'hyperbole qui passe par le centre du cercle, et donnent, ainsi que l'indique la figure 4, les sécantes B_3C_3 et B_4C_4.

L'équation (9) n'a de racines réelles que si l'on a

$$P^{\frac{3}{2}} + 4l'N \geqslant 0 ,$$

et ces deux racines, qui sont alors supérieures à 1, correspondent aux deux sécantes B_1C_1 et B_2C_2.

La condition de décomposition $N^2 - PM = 0$ exprime que le point donné A appartient à une courbe du quatrième degré ayant pour équation cartésienne

$$4x^2y^2 \sin^2\theta + l'^2(x^2 + y^2 - 6xy\cos\theta) - 2l'^4 = 0 . \tag{10}$$

Cette courbe a pour axes les bissectrices des angles XOY et XOY', la longueur du premier étant $l' \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$, et celle du second $l' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$; elle est donc tangente en ces points à la sextique enveloppe (4); ses points de rencontre avec OX et OY sont à la distance $l'\sqrt{2}$ du point O.

Si l'angle XOY est droit, la courbe (10) a pour équation polaire

$$\rho = \frac{(\sqrt{1 + 8\sin^2 2\omega} - 1)\,l'^2}{2\sin^2 2\omega},$$

sa forme, aisée à construire, montre qu'elle est toute intérieure à l'astroïde, ainsi que sur la figure 5; donc les sécantes qui passent par les points de cette courbe sont toutes réelles. On peut lui donner une définition géométrique assez simple, car si on projette chacun de ses points en m et m' sur des parallèles aux côtés de l'angle à la distance $\frac{l'}{2}$, le produit $Om \times Om'$ est constant et égal à $\frac{3}{4}l'^2$.

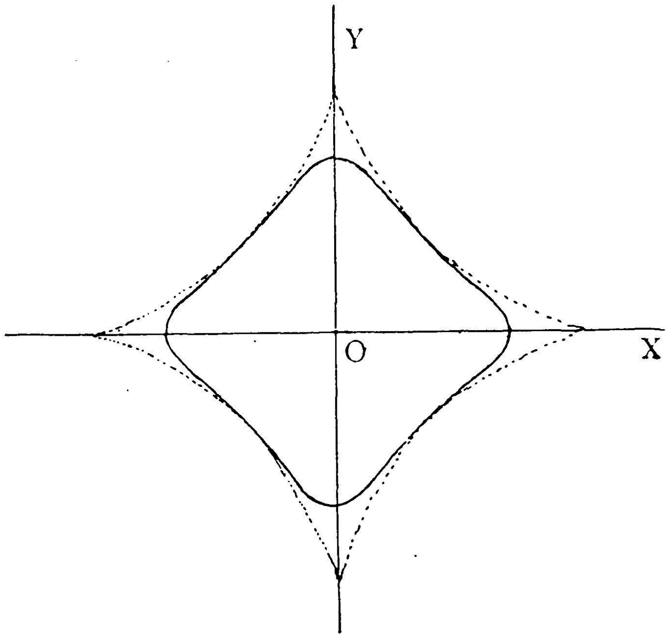

Fig 5.

Quand l'angle XOY n'est pas droit, la courbe (10) conserve une forme analogue.

Il ne reste plus qu'à construire les quatre sécantes, en faisant

$$t = \frac{-\sqrt{P}}{N} z,$$

si z est une ligne à déterminer, de même signe que t; alors, par l'équation (8), on trouve deux lignes de différence $\sqrt{P}$ et de produit $\frac{-l'N}{\sqrt{P}}$; par l'équation (9) deux lignes de somme $\sqrt{P}$ et de produit $\frac{-l'N}{\sqrt{P}}$. Enfin, par

$$\frac{CO}{CE} = \frac{-\sqrt{P}\,z}{N},$$

on fixe le point C qu'il n'y a plus qu'à joindre au point A.

P. Barbarin (Paris).