Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1912)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A

Kapitel: II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Autor: Baatard, Lucien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14281

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\,102\,976 : 11\,881\,376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 . 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\,102\,976}\ .$$

2. — $\sqrt[4]{131\,079\,601}$

$$a - \alpha = 100\ ; \qquad 131\,079\,601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 . 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\,079\,601}\ .$$

3. — $\sqrt{4\,613\,904}$

$$a - \alpha = 2000\ ; \qquad 4\,613\,904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153\ .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\,613\,904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\,613\,904}\ .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc.}\ ,$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.

Pour s'en rendre compte, il suffit de poser

$$A = x^n + h$$

et de remplacer a par x dans les calculs précédents ; h s'ajoute à R ou R' et la conclusion pour a subsiste pour x.

Ex. : $\sqrt[3]{72\,000}$

$$a - \alpha = 40 \; ; \qquad 72\,000 : 40^2 = 45 \; ; \qquad \frac{45 + 2 . 40}{3} = 41 \text{ quot. inc.}$$

$$41^3 = 68\,921 < 72\,000$$

$$42^3 = 74\,088 > 72\,000 \, .$$

Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on a la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{z^n . A} \; ;$$

on calcule, comme ci-dessus, $\sqrt[n]{z^n . A}$ à moins d'une unité près, par défaut, et on divise le résultat par z.

Ex. : Soit à calculer $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{10\,000\,000}$$

$$a - \alpha = 200 \; ; \quad 10\,000\,000 : 200^2 = 250 \; ; \quad \frac{250 + 2 . 200}{3} = 216 \text{ quot. inc.}$$

$$216^2 = 46\,656$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc.} \; ; \quad \frac{214 + 2 . 216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2{,}15 = \sqrt[3]{10} \, , \text{ à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets : *formule* (ω'). En prenant les quotients complets p' et y_1 des divisions qui donnent p et v_1, on obtient un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès ; l'application du même calcul à y_1 donnera un nouveau nombre fractionnaire $y_2 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_1$; on obtiendra de même $y_3 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_2$, et ainsi de suite.

Ce calcul se représente par la formule (ω')

$$y_1 = \frac{p' + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} .$$

L'erreur diminue assez fortement quand on passe de l'un de ces résultats au suivant.

A titre d'exemple, reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - \alpha = 2 \; ; \qquad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \; ; \qquad \frac{\frac{5}{2} + 2 \cdot 2}{3} = \frac{13}{6} = 2{,}1666 \ldots$$

$$10 : \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169} \; ; \qquad \frac{\frac{360}{169} + \frac{2 \cdot 13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2{,}1545 \ldots$$

On sait que $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544 \ldots.$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques que je laisse de côté dans cet article.

Je me bornerai à démontrer, à l'aide de quelques exemples, la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1} \; ; \; \frac{3^*}{2} \; ; \; \frac{7}{5} \; ; \; \frac{17^{**}}{12} \; ; \; \frac{41}{29} \; ; \; \frac{99}{70} \; ; \; \frac{239}{169} \; ; \; \frac{577^{***}}{408} \; ; \; \frac{1393}{985} \; ; \; \frac{3363}{2378} \; ;$$

$$\frac{8119}{5741} \; ; \; \frac{19601}{13860} \; ; \; \frac{47321}{33461} \; ; \; \frac{114243}{80782} \; ; \; \frac{275807}{195025} \; ; \; \frac{665857^{***}}{470832} \; ; \ldots$$

(ω') $$\frac{3}{2} \; ; \; \frac{17}{12} \; ; \; \frac{577}{408} \; ; \; \frac{665857}{470832} \; ; \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1}\,;\quad \frac{2^{*}}{1}\,;\quad \frac{5}{3}\,;\quad \frac{7^{**}}{4}\,;\quad \frac{19}{11}\,;\quad \frac{26}{15}\,;\quad \frac{71}{41}\,;\quad \frac{97^{***}}{56}\,;\quad \frac{265}{153}\,;\quad \frac{362}{209}\,;\quad \frac{989}{571}\,;$$

$$\frac{1351}{780}\,;\quad \frac{3691}{2131}\,;\quad \frac{5042}{2911}\,;\quad \frac{13775}{7953}\,;\quad \frac{18817^{****}}{10864}\,;\ \ldots$$

$$(\omega')\qquad \frac{2}{1}\,;\quad \frac{7}{4}\,;\quad \frac{97}{56}\,;\quad \frac{18817}{10864}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\quad \frac{10^{*}}{3}\,;\quad \frac{63}{19}\,;\quad \frac{199^{**}}{60}\,;\quad \frac{1257}{379}\,;\quad \frac{3970}{1197}\,;\quad \frac{25077}{7561}\,;\quad \frac{79201^{***}}{23880}\,;\ \ldots$$

$$(\omega')\qquad \frac{10}{3}\,;\quad \frac{199}{60}\,;\quad \frac{79201}{23880}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\quad \frac{4}{1}\,;\quad \frac{27}{7}\,;\quad \frac{31^{**}}{8}\,;\quad \frac{213}{55}\,;\quad \frac{244}{63}\,;\quad \frac{1677}{433}\,;\quad \frac{1921^{***}}{496}\,;$$

$$(\omega')\qquad a - \alpha = 3 \qquad \frac{4}{1}\,;\quad \frac{31}{8}\,;\quad \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$$

$$a + \alpha = 4 \qquad \frac{31}{8}\,;\quad \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^m. Ce n'est cependant pas toujours le cas.

Lucien Baatard (Genève).