

DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

Autor(en): **Schuepp, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14290>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

($\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}$ est un nouvel opérateur symbolique!); elles correspondent, avec nos notations, aux

$$- \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}, \quad - \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + K \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}.$$

Il est bien entendu que M. JAUMANN obtient tout cela avec les coordonnées et ensuite ses opérateurs symboliques font ressembler ses formules à de véritables hiéroglyphes égyptiens. Il n'y a rien d'absolu et de concret dans ces opérateurs; rien qui soit pratique et qui réponde aux idées logiques précises de l'œuvre magistrale de HAMILTON.

Ces opérateurs symboliques, semblables à ceux dont GIBBS et ses élèves font un si large usage, sont donc inutiles et ils ont beaucoup retardé le développement logique du calcul vectoriel. Nous espérons l'avoir démontré, d'après ce que nous avons dit.

C. BURALI-FORTI (Turin) et R. MARCOLONGO (Naples).

DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

M. OSGOOD, dans son livre sur la Théorie des fonctions¹, démontre que toutes les fonctions, possédant un théorème d'addition analogue à celui du sin, et cos, sont, au fond, identiques à ces fonctions. La démonstration d'Osgood n'est pas très simple et conduit finalement à l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La démonstration peut être simplifiée et comme l'exposé suivant ne suppose rien de l'analyse supérieure, cette détermination des fonctions trigonométriques par une équation fonctionnelle pourrait être accessible à l'enseignement secondaire (dans un exposé un peu serré).

Osgood établit d'une façon élémentaire, au début de son exposé, que la continuité en un point entraîne la continuité en tout point. Nous ferons donc a priori les hypothèses suivantes, qui n'impliquent aucune restriction.

¹ *Lehrbuch der Funktionentheorie*, tome I, page 510 et suivantes.

Soient $S(x)$ et $C(x)$ 2 fonctions définies et continues, satisfaisant aux équations fonctionnelles :

$$(1) \quad \begin{cases} S(x + y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y) \\ C(x + y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y) \end{cases}$$

$$(2) \quad S(-x) = -S(x) \quad , \quad C(-x) = C(x) \quad .$$

De (2) résulte pour $x = 0$

$$(3) \quad S(0) = 0 \quad .$$

D'où, d'après (1)

$$C(0) = C^2(0) \quad ;$$

on aura donc soit

$$C(0) = 0 \quad \text{ou} \quad C(0) = 1 \quad .$$

La 1^{re} valeur donne, en faisant $y = 0$ dans (1) comme solution du problème

$$S(x) = 0 \quad , \quad C(x) = 0 \quad .$$

Nous ne considérerons donc dans la suite que le cas

$$(4) \quad C(0) = 1 \quad .$$

De la 2^{me} équation (1) résulte, pour $y = -x$, et d'après (2)

$$(5) \quad 1 = C^2(x) + S^2(x) \quad .$$

Les valeurs des fonctions sont donc comprises entre -1 et $+1$.

On déduit, ensuite, exactement comme en trigonométrie les formules

$$(6) \quad 2C^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + C(x) \quad \text{et} \quad 2S^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - C(x) \quad .$$

Si $x = p$ est un zéro de $S(x)$, $x = np$ est aussi un zéro ; car de (1) résulte pour $y = p$ et $x = p, 2p, 3p, \dots$ successivement :

$$S(2p) = 0 \quad S(3p) = 0, \dots \quad S(np) = 0, \dots$$

On peut donc déterminer un intervalle $0 < x \leq \varepsilon$, ne renfermant aucun zéro ; car, sinon, ε étant pris aussi petit qu'on le désire, les zéros de $S(x)$ s'accumuleraient partout et $S(x)$ serait identiquement 0¹.

¹ La marche suivie jusqu'ici est aussi celle d'Osgood.

A cause de la continuité, le signe de $S(x)$ reste constant dans l'intervalle.

De plus, à cause de (4) et de la continuité de $C(x)$, on peut choisir ϵ suffisamment petit pour que $C(x)$ reste toujours positif dans l'intervalle.

Soit a un point quelconque de l'intervalle $S(a)$ la valeur correspondante de $S(x)$.

Puisque $|S(a)| < 1$, on peut déterminer un angle α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$, tel que

$$S(a) = \sin \alpha .$$

D'après (5), et puisque $C(a) > 0$,

$$C(a) = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha .$$

De (6) résulte, puisque $S(x)$ conserve dans tout l'intervalle le signe de $\sin \alpha$ et que $C(x)$ reste positif,

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = + \sin \frac{\alpha}{2} ,$$

et, par répétition, pour un entier positif

$$S\left(\frac{a}{2^m}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) \quad \text{et également} \quad C\left(\frac{a}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) .$$

Si l'on emploie successivement les équations (1) pour

$$y = \frac{a}{2^m}, \quad x = \frac{a}{2^m}, \quad \frac{2a}{2^m}, \quad \dots, \quad \frac{(n-1)a}{2^m},$$

on obtient

$$S\left(\frac{n}{2^m} a\right) = \sin\left(\frac{n}{2^m} \alpha\right) \quad C\left(\frac{n}{2^m} a\right) = \cos\left(\frac{n}{2^m} \alpha\right)$$

Les points $\frac{n}{2^m}$ sont partout denses. A cause de la continuité, on a donc pour tout p positif,

$$S(p \cdot a) = \sin(p \cdot \alpha) , \quad C(p \cdot a) = \cos(p \cdot \alpha) ,$$

et comme les fonctions $S(x)$ et $\sin(x)$, $C(x)$ et $\cos(x)$ sont en même temps paires ou impaires, les relations sont vraies encore si p est négatif.

