NOUVEAU PROCÉDÉ POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES SIMPLES

En faisant enfin

$$pa = x \ , \qquad \frac{\alpha}{a} = \mu$$

on a, pour tout x,

$$\text{(7)} \qquad S(x) = \sin(\mu x) \qquad C(x) = \cos(\mu x) \ .$$

Une vérification montre que cette forme des fonctions cherchées est non seulement nécessaire, mais encore que toute valeur de μ fournit une solution.

La méthode s'applique aussi à la fonction tg (x).

H. SCHUEPP (Zurich).

(Traduction de M. F. LÉVY, Genève.)

NOUVEAU PROCÉDÉ
POUR LE
DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES
PÉRIODIQUES SIMPLES

I. — On sait qu'une fraction proprement dite $\frac{R_0}{N}$ à dénominateur N premier relativement à 10, fournit un développement décimal purement périodique. On l'obtient par division décimale de R_0 par N. Nous indiquons, dans ce qui suit, un procédé beaucoup plus simple, qui n'a pas été signalé jusqu'ici, bien qu'il soit élémentaire. Il s'appuie uniquement sur l'addition et la multiplication, il est donc, quant au degré des opérations utilisées, plus simple que le procédé habituel.

Nous supposons le dénominateur N de la forme $10m - 1$, ceci sans nuire à la généralité, car dans les 3 autres possibilités $10m + 1$, $10m + 3$, $10m - 3$, on peut passer à la forme choisie, en multipliant haut et bas par 9, 3 ou 7.

Les équations suivantes traduisent le procédé usité par division :

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 10R_0 = N \cdot y_1 + R_1 \ , \\ 10R_1 = N \cdot y_2 + R_2 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 10R_{k-1} = N \cdot y_k + R_k \ , \end{array} \right. \qquad k = (1, 2, 3 \ \ldots)$$

où R_1, R_2... sont les restes des divisions successives et y_1 y_2... les chiffres du développement cherché.

Avec ces équations on peut montrer, sous l'hypothèse faite, N premier relativement à 10, que le développement est purement périodique ; et aussi que R_k est en même temps reste de la division 10^k R_0 : N.

Si R_t est le premier reste égal à R_0, t est la longueur de la période, dont les chiffres sont y_1 $y_2 \cdots y_t$.

Décomposons R_k en la somme de ses dizaines et de ses unités :

$$R_k = 10z_k + e_k .$$

On déduit de (1), en faisant $N = 10m - 1$,

$$10R_{k-1} = (10m - 1)y_k + 10z_k + e_k = 10(my_k + z_k) + e_k - y_k .$$

Il en résulte que $e_k - y_k$ est divisible par 10, ce qui ne peut être que si

$$(3) \qquad e_k = y_k , \quad \text{puisque} \quad e_k \text{ et } y_k \leqq 9 .$$

D'où réduction de l'équation ci-dessus à

$$(4) \qquad R_{k-1} = my_k + z_k , \quad \text{ou} \quad R_{k-1} = me_k + z_k .$$

On a donc le *théorème :* Si le dénominateur de la fraction $\frac{R_0}{N}$ a la forme $10m - 1$, la suite des chiffres de la période de son développement décimal est la même que celle des unités des restes successifs. En particulier, de $R_t = R_0$ résulte que le dernier chiffre de la période est le chiffre des unités du numérateur $R_0 = 10z_0 + e_0$. Pour le procédé habituel, cette propriété reste sans emploi, puique les e_k se déduisent immédiatement après les y_k.

Mais la formule récurrente (4) permet de calculer en sens contraire la suite des restes, d'où se déduira la période renversée.

D'abord nous avons de $R_0 = R_t$ la valeur e_t. De (4) résulte e_{t-1} et ainsi de suite. Le calcul se termine sitôt qu'est obtenu un reste égal à R_0.

La simplicité de ce procédé ressort des *exemples suivants :*

1° Développer $\frac{34}{39}$;

$$m = 4 \qquad R_0 = R_t = 34 \qquad e_t = 4 \qquad z_t = 3 .$$

L'on peut disposer le calcul d'après le schéma suivant :

e_k	8	7	1	7	9	4
z_k	2	0	3	3	1	3
me_k	32	28	4	28	36	16
R_{k-1}	34	28	7	31	37	19

D'où $\frac{34}{39} = 0,\overline{871794}$.

2° Soit la fraction $\frac{2}{7}$. Pour donner au dénominateur la forme voulue, multiplier haut et bas par 7. Alors $m = 5$ et l'on obtient

$$\frac{2}{7} = \frac{14}{49} = 0,\overline{285714} \ .$$

Les opérations, effectuées de tête, sont

$R_0 = 14$	Chiffre 4
$5 . 4 + 1 = 21$	» 1
$5 . 1 + 2 = 7$	» 7
$5 . 7 + 0 = 35$	» 5
$5 . 5 + 3 = 28$	» 8
$5 . 8 + 2 = 42$	» 2
$5 . 2 + 4 = 14 = R_0$	

II. — Après avoir exposé très élémentairement le procédé, donnons encore une deuxième démonstration moins simple, mais qui fait apparaître la dépendance de la suite des restes de la forme du dénominateur, et enlève à la première démonstration ce que son début a d'arbitraire.

Lorsque

$$ab \equiv 1 \pmod{N} \ ,$$

où a et b sont relativement premiers à N, les nombres a et b appartiennent au même exposant t (EULER appelle a et b, nombres associés ; KRONECKER, diviseurs conjugués de l'unité). Ces nombres satisfont aux congruences :

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N}$$

c'est-à-dire que les puissances croissantes de a

$$a^0 \, a^1 \, a^2 \, \ldots \, a^t$$

donnent les mêmes restes que les puissances décroissantes du nombre associé b,

$$b^t\, b^{t-1} \dots b^1\, b^0 \;.$$

La justesse de cette propriété, qui est parfois utile lors de la détermination de racines primitives, se vérifie en élevant à la puissance s, la congruence

$$ab \equiv 1 \pmod{N} \;.$$

D'où, après multiplication par b^{t-s}.

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N} \;.$$

Mais 10 et m sont associés d'après

$$10m \equiv 1 \,(\text{mod } N = 10m - 1) \;.$$

Donc les restes de

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2, \dots\ 10^t$$

sont identiques à ceux de

$$m^t\ ,\quad m^{t-1}\ ,\quad m^{t-2}\ ,\ \dots\ m^0\ .$$

Par exemple, par suite de $10 \,.\, 4 \equiv 1 \pmod{39}$, les puissances

	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
restes :	1	10	22	25	16	4	1

et les puissances :

	4^0	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
restes	1	4	16	25	22	10	1

donnent les mêmes restes en sens contraire.

De même, en général, les restes de

$$10^0 R_0 \quad 10^1 R_0 \quad 10^2 R_0 \quad 10^k R_0 \quad 10^{t-1} R_0 \quad 10^t R_0$$

et de

$$m^0 R_0 \quad m^1 R_0 \quad m^2 R_0 \quad m^k R_0 \quad m^{t-1} R_0 \quad m^t R_0$$

sont les mêmes, en ordre renversé.

Soit donc, $R_k = 10z_k + e_k$, le reste de $10^k R_0$, ou, d'après ce qui précède, de $m^{t-k} R_0$. Alors on a, pour le module, $N = 10m - 1$,

$$R_{k-1} \equiv m^{t-k+1} R_0 \equiv mR_k \equiv m(10z_k + e_k)$$
$$\equiv (10m - 1)\, z_k + (me_k + z_k) \;.$$

D'où

$$R_{k-1} \equiv me_k + z_k (\mathrm{mod}\, N) .$$

De $R_k < N$, ou $10z_k + e_k < 10m - 1$, résulte $z_k < m - 1$. En tenant compte, en plus, de $e_k \leqq 9$, on a $me_k + z_k < 10m - 1$ et

$$R_{k-1} = me_k + z_k ,$$

ce qui est la formule récurrente, retrouvée à nouveau.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de la période, se déduit comme nombre entier de $\frac{10R_{k-1}}{10m-1}$ et comme

$$10R_{k-1} = 10(me_k + z_k) = (10m - 1)e_k + 10z_k + e_k$$

on voit de suite qu'il est justement e_k.

La première démonstration, plus immédiate de la formule récurrente, est due à mon fils P. Pasternak, ingénieur à Zurich.

Mai 1911. Léon Pasternak (Zurich).

(Traduction de M. F. Lévy, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Parmi les axiomes adoptés par M. Peano pour le fondement de la Géométrie figure une proposition que l'on peut exprimer de la manière suivante :

A, B, C *désignant trois points qui n'appartiennent pas à une même droite*, D *désignant un point du segment* BC, *et* E *un point du segment* $\overline{\mathrm{AD}}$; *la droite* BE *contient un point* F *de la droite* AC ; *ce point appartient au segment* $\overline{\mathrm{AC}}$, *et le point* E *appartient au segment* $\overline{\mathrm{BF}}$.

Je sépare, pour les distinguer, les trois propriétés ainsi postulées et dont la première seule est proprement projective, tandis que les deux autres sont visiblement des propriétés de *connexion*.

On sait qu'un second axiome planaire de M. Peano a été signalé