Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'où

$$R_{k-1} \equiv me_k + z_k \pmod{N} .$$

De $R_k < N$, ou $10z_k + e_k < 10m - 1$, résulte $z_k < m - 1$. En tenant compte, en plus, de $e_k \leqq 9$, on a $me_k + z_k < 10m - 1$ et

$$R_{k-1} = me_k + z_k ,$$

ce qui est la formule récurrente, retrouvée à nouveau.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de la période, se déduit comme nombre entier de $\frac{10R_{k-1}}{10m - 1}$ et comme

$$10R_{k-1} = 10(me_k + z_k) = (10m - 1)e_k + 10z_k + e_k$$

on voit de suite qu'il est justement e_k.

La première démonstration, plus immédiate de la formule récurrente, est due à mon fils P. Pasternak, ingénieur à Zurich.

Mai 1911. Léon Pasternak (Zurich).

(Traduction de M. F. Lévy, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Parmi les axiomes adoptés par M. Peano pour le fondement de la Géométrie figure une proposition que l'on peut exprimer de la manière suivante :

A, B, C *désignant trois points qui n'appartiennent pas à une même droite,* D *désignant un point du segment* BC, *et* E *un point du segment* $\overline{AD}$; *la droite* BE *contient un point* F *de la droite* AC ; *ce point appartient au segment* $\overline{AC}$, *et le point* E *appartient au segment* $\overline{BF}$.

Je sépare, pour les distinguer, les trois propriétés ainsi postulées et dont la première seule est proprement projective, tandis que les deux autres sont visiblement des propriétés de *connexion*.

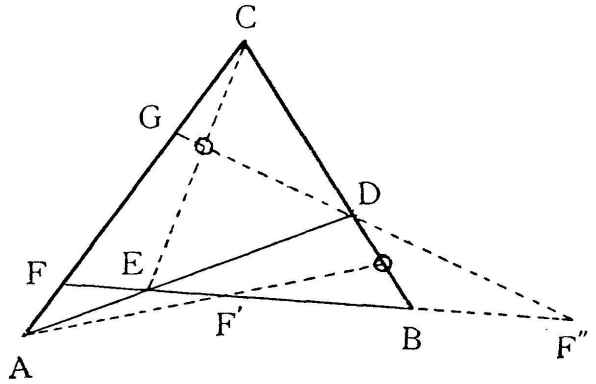
On sait qu'un second axiome planaire de M. Peano a été signalé

par M. Moore[1] comme superflu et est, en effet, une conséquence du précédent. Il est facile de reconnaître que la troisième des propriétés exprimées ci-dessus est aussi une conséquence des deux premières, et c'est sa démonstration qui fait l'objet de cette Note. Il est d'ailleurs manifeste que l'axiome ainsi réduit ne saurait l'être davantage, car la première propriété constitue la condition évidemment indispensable de l'existence du plan et la seconde définit sa connexion, soit : *le plan est une surface.*

On sait que l'une des propriétés de l'ordre linéaire ouvert peut, appliquée à la droite, être exprimée de la manière suivante :

Parmi trois points d'une droite, il y en a toujours un, et un seulement, qui appartient au segment défini par les deux autres.

Il suffit donc d'établir que F ne peut pas appartenir au segment $\overline{BE}$ ni B au segment $\overline{EF}$.



Le point D appartenant au segment $\overline{BC}$, C ne peut appartenir au segment $\overline{BD}$ (propriété de l'ordre linéaire ouvert), et, par suite, aucune droite contenant A et un point de ce segment ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, deux droites ne pouvant avoir plus d'un point commun. En conséquence, F′ désignant un point quelconque du segment $\overline{BE}$, la droite $\overline{AF'}$, devant contenir un point du segment $\overline{BD}$ (axiome réduit), ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, et, par suite, F′, c'est-à-dire un point quelconque du segment $\overline{BE}$, ne peut appartenir à la droite AC.

Si F″ désigne un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$, c'est-à-dire si le point B appartient au segment $\overline{F''E}$, la droite F″D devra contenir un point du segment $\overline{CE}$ (axiome réduit) et devra aussi, par suite, E appartenant par hypothèse au segment $\overline{DA}$, contenir un point G du segment $\overline{CA}$ (axiome réduit). La droite AC ne pouvant ainsi avoir avec la droite GD aucun point

[1] E. H. Moore, On the projective axiomes of geometry, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 3 (1907), p. 147. – Cf. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1909, p. 7-9.

commun distinct de G, ne peut, en particulier, contenir F″, c'est-à-dire un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$.

La troisième des propriétés exprimées dans l'axiome planaire de M. Peano est donc bien démontrée en fonction des deux premières et de celles qui sont exprimées par l'axiome d'ordre rappelé plus haut et par l'axiome d'après lequel *une droite est définie par deux quelconques de ses points.*

G. Combebiac (Limoges).

Sur la topologie des courbes interscendantes.

Extrait d'une lettre de M. G. Loria à Gênes,
à propos d'une Note de M. Turrière (Poitiers).

...Les remarques très sensées de M. Turrière sur les « courbes transcendantes et interscendantes » (*L'Enseignement mathématique*, T. XIV, p. 209) m'entraînent de nouveau dans un champ de recherche où je me suis tenu pendant longtemps et dans lequel je reviens toujours avec plaisir. « J'y suis, j'y reste » pour observer qu'une phrase écrite par ce géomètre a besoin, si je ne me trompe, d'un commentaire pour être comprise à sa juste valeur.

En effet, M. Turrière dit que les paraboles $y = x^m$, m étant un nombre rationnel, s'approchent de plus en plus de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$; or je dis qu'il faut se restreindre à ce qui arrive dans l'angle des coordonnées positives. Pour le prouver, il faut et il suffit de considérer ce qui suit :

1° Suivant que le nombre positif $m \gtrless 1$, et suivant la forme arithmétique de son expression réduite à ses termes moindres, les paraboles $y = x^m$ se présentent sous une des SIX formes données par les figures ci-jointes :

2° Si on développe 2 en fractions continues on trouve

$$1 + \frac{1}{2 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{2 +} \dots .$$

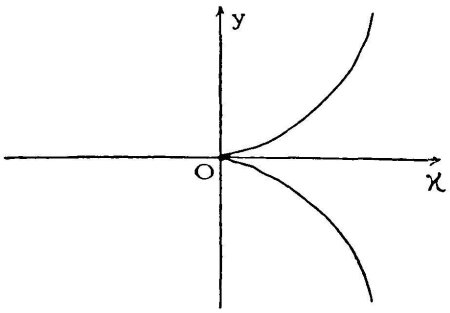
Les premières réduites sont 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{12}$ et les réduites suivantes ont alternativement les formes

$$\frac{2h+1}{2k+1} \quad \text{et} \quad \frac{2h+1}{2k}$$

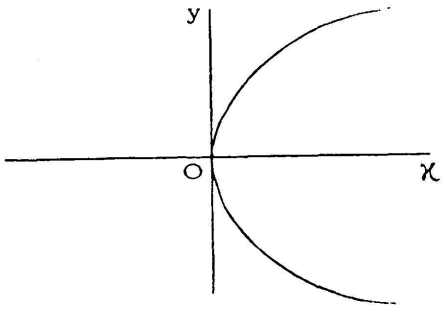
comme il s'ensuit de la loi de formation des réduites.

Si donc on s'arrête à une réduite de rang impair on a comme « courbe approchante » de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$ une courbe qui a la

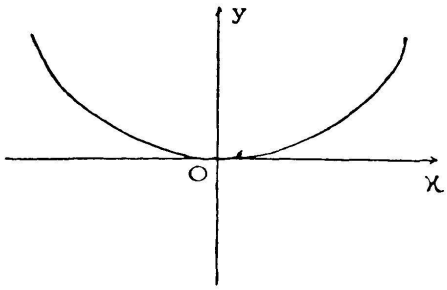
forme donnée par la fig. 6 ; si au contraire on s'arrête à une réduite de rang pair on trouve que la « courbe approchante » a la forme donnée par la fig. 4. Ces deux formes coïncident dans l'angle $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y}$, mais sont tout à fait différentes dans les autres régions du plan, de manière qu'on ne peut parler de limite de ces



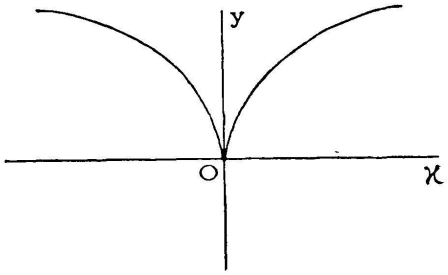
(Fig. 1) : $m = \frac{2h}{2k+1} < 1$.



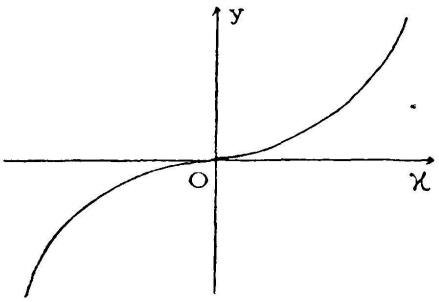
(Fig. 2) : $m = \frac{2h}{2k+1} > 1$.



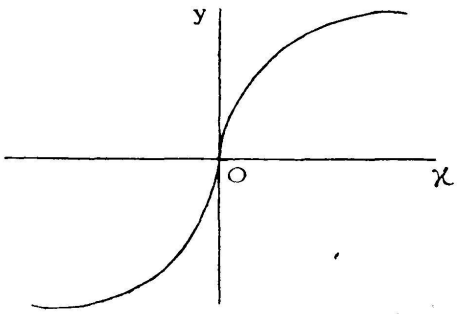
(Fig. 3) : $m = \frac{2h+1}{2k} < 1$.



(Fig. 4) : $m = \frac{2h+1}{2k} > 1$.



(Fig. 5) : $m = \frac{2h+1}{2k+1} < 1$.



(Fig. 6) . $m = \frac{2h+1}{2k+1} > 1$.

courbes que dans l'angle de coordonnées positives. On peut généraliser ce résultat à toutes les courbes $y = x^m$ en remarquant que x^m, lorsque m est un nombre irrationnel, est une « fonction bien définie » seulement pour les valeurs positives de x. Cela prouve que la topologie des paraboles interscendantes est bien différente de celle des paraboles algébriques, car celles-là, à dif-

férence de celles-ci, présentent à l'origine un *point d'arrêt*. Je crois que des phénomènes analogues, mais plus compliqués, se présenteront en d'autres courbes interscendantes, par exemple dans la courbe

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right),$$

rappelée par M. Turrière et qui serait digne d'une étude détaillée au point de vue de la forme. On peut dire même en général que, si les courbes interscendantes ont été peu considérées, leur topologie est toute à faire...

G. Loria (Gênes).

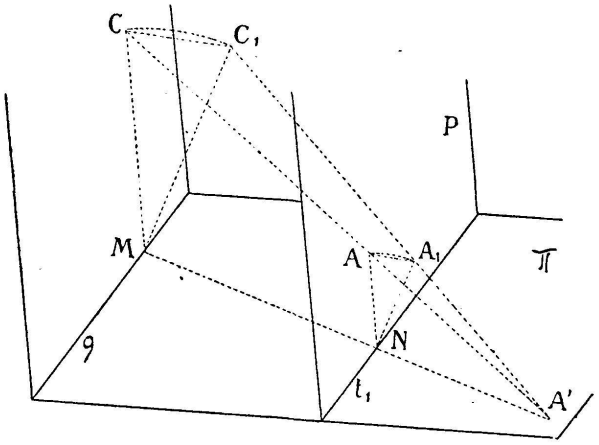
Une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale.

A propos d'un article de M. L. Crelier (Bienne).

Dans un article intitulé Les figures collinéaires (*L'Enseignement mathématique*, XIVe année, p. 121), M. Crelier publie un chapitre de géométrie élémentaire avec le but de présenter la collinéation centrale d'une manière élémentaire. Dans ce qui suit, j'exposerai une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale, que M. Crelier avait aussi touché.

Le théorème est le suivant :

Deux figures collinéaires restent collinéaires si l'on fait tourner d'un angle quelconque le plan de l'une autour de l'intersection des deux plans. Le centre tourne en même temps et en même sens du même angle autour du premier axe secondaire.



Soit (fig) le point A′ du plan π comme projection centrale du point A situé dans le plan P, relativement au centre C. Faisons tourner P d'un angle φ autour de t_1 et en même temps et dans le

même sens du même angle le centre C autour de q ; t_1 — l'axe de collinéation — étant l'intersection de P et π ; q - le premier axe secondaire — étant l'intersection de π avec le plan mené par C parallèlement à P. Supposons que, par le mouvement de rotation, A soit venu en A_1 et C en C_1.

En désignant par M le centre de la circonférence décrite par C et par N celui de la circonférence décrite par A, nous constatons que les triangles CMC_1 et ANA_1 sont semblables, parce que tous les deux sont isoscèles et par condition $\sphericalangle CMC_1 = \sphericalangle ANA_1$. Et comme les triangles sont aussi semblablement situés, on a :

$$CC_1 \parallel AA_1, \tag{1}$$

De la similitude des triangles A'NA et A'MC on a :

$$A'A : A'C = NA : MC. \tag{α}$$

De même de la similitude des triangles ANA_1 et CMC_1 on a :

$$NA : MC = AA_1 : CC_1. \tag{β}$$

De (α) et (β) on obtient :

$$A'A : A'C = AA_1 : CC_1, \tag{2}$$

La relation (2) avec le résultat (1) dit que la ligne de jonction des points A_1 et C_1 passe par A'. Le théorème est donc démontré.

L. Hantos (Kecskemét, Hongrie)

Sur un certain développement en fraction continue.

A propos d'une communication de M. Baatard.

Au cours d'une communication présentée à Soleure (*Ens. math.*, 1912, p. 31-37), M. Baatard a signalé une propriété curieuse d'une famille de fractions continues qu'il ne serait peut-être pas inutile de mettre en lumière.

Soient a_0 le terme initial et $a_1, a_2, \ldots a_m$ les quotients incomplets d'une période dans le développement en fraction continue de $\sqrt{A}$; je rappelle que $a_m = 2a_0$.

A ce terme initial et à la suite infinie des quotients incomplets répondent les réduites $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, etc., qui convergent de plus en plus vers $\sqrt{A}$.

Appliquons à l'une des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ le procédé (ω') de M. Baatard[1].

Nous aurons une nouvelle valeur approchée b de $\sqrt{A}$ qui s'exprime ainsi

$$b = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}.$$

Or, dans les exemples choisis par M. Baatard, on a, quel que soit n, $b = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$; en d'autres termes, on a la relation

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}. \tag{1}$$

M. Baatard fait remarquer avec raison que ce fait ne se présente pas toujours.

Une question se pose alors : quels sont les nombres A dont les développements en fraction continue fournissent des réduites vérifiant la condition (1) ?

Je rappellerai d'abord que la relation (1) a lieu pour tout A, lorsque l'indice n est un multiple de m, m étant le nombre des termes de la période.

On a, en effet, quel que soit i,

$$p_{im} - q_{im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^i, \tag{2}$$

d'où

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^{2i},$$

et par conséquent (Cf. *Serret*, Cours d'alg. sup., 5e édit., t. 1,

---

[1] Dans le cas général d'une racine quelconque $\sqrt[n]{A}$, ce procédé consiste à remplacer une première valeur *approchée* a de $\sqrt[n]{A}$ par la valeur

$$b = \frac{p' + (n-1)a}{n}, \qquad \text{où} \qquad p' = \frac{A}{a^{n-1}}$$

c'est-à-dire par

$$a - \frac{a^n - A}{na^{n-1}} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en posant $x^n - A = f(x)$. On voit donc que le procédé (ω') revient à celui de Newton appliqué à l'équation $x^n - A = 0$. (Cf. Encycl. des Sciences math., Tome I, art. 23, p. 282, et Tome II, art. 26, p. 58.)

p. 76 et 77)

$$(3) \qquad p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_{im} - q_{im}\sqrt{A})^2 ,$$

ce qui donne bien

$$\frac{p_{2im}}{q_{2im}} = \frac{p_{im}^2 + Aq_{im}^2}{2p_{im}q_{im}} .$$

Mais la relation (1) n'a pas lieu pour tout A, lorsque l'indice n n'est pas un multiple de m. Soit, par exemple, $A = 7$. Ici $a_0 = 2$, la période contient quatre termes 1, 1, 1, 4. En appliquant (ω') à $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$, on a $b = \frac{11}{4}$ et comme $\frac{p_2}{q_2} = 3$, on voit que $b \neq \frac{p_2}{q_2}$.

Je dis que les nombres A qui vérifient la relation (1) sont *caractérisés* par la condition :

$$(4) \qquad 2a_0 \text{ est divisible par } A - a_0^2 .$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. *Elle est nécessaire.* En effet, la relation (1) étant supposée vraie pour tout n, on doit avoir en particulier

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} ,$$

et comme

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} ,$$

on en tire

$$2a_0 = a_1(A - a_0^2) .$$

Donc $2a_0$ est divisible par $A - a_0^2$ et le quotient de la division est précisément égal à a_1.

La condition (4) *est suffisante.* Supposons que $2a_0$ soit divisible par $A - a_0^2$ et posons

$$\frac{2a_0}{A - a_0^2} = d .$$

En formant les quotients *complets* x_1, x_2, on trouve

$$x_1 = \frac{a_0 + \sqrt{A}}{A - a_0^2} = \frac{2a_0 + \frac{1}{x_1}}{A - a_0^2} = d + \frac{1}{x_1(A - a_0^2)} .$$

Donc $a_1 = d$ et comme $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, on en tire

$$x_2 = x_1(A - a_0^2) = 2a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Par conséquent $a_2 = 2a_0$ et $x_3 = x_1$.

La période se compose donc de deux termes :

$$a_1 = \frac{2a_0}{A - a_0^2} \quad \text{et} \quad a_2 = 2a_0,$$

ou du seul terme $2a_0$, lorsque $A - a_0^2 = 1$.

Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu, en vertu de (3) (en posant $m = 2$), pour toutes les réduites de rangs pairs. Il nous reste à la démontrer pour les réduites de rangs impairs.

Or

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{A - a_0^2}{2a_0} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1}.$$

La relation (1) a donc lieu pour $n = 1$ et on peut écrire dans ce cas particulier

$$(5) \qquad p_2 - q_2\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_1 - q_1\sqrt{A})^2.$$

Considérons maintenant une réduite quelconque $\frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$ de rang impair. Soit

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{2a_0} = \frac{2a_0a_1 + 1}{2a_0}.$$

On a, comme on sait (*Serret*, p. 62),

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(\alpha - \beta x_1)^{i-1},$$

et comme $\alpha - \beta x_1 = p_2 - q_2\sqrt{A}$, il vient

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(p_2 - q_2\sqrt{A})^{i-1}$$

d'où, en vertu de (2) et de (5),

$$p_{2(2i-1)} - q_{2(2i-1)}\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A})^2$$

ce qui conduit à la relation (1) pour n impair. Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu quel que soit n. C.Q.F.D.

Il résulte de là que les nombres A vérifiant la relation (1) sont de la forme

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1},$$

a_0 étant un nombre entier quelconque et a_1 un diviseur quelconque de $2a_0$. Le nombre des nombres A compris entre a_0^2 et $(a_0+1)^2$ est donc égal au nombre des différents diviseurs de $2a_0$.

Pour $a_0 = 1$, le diviseur $a_1 = 2$ ou 1, d'où $A = 2$ et 3.

Pour $a_0 = 2$, le diviseur $a_1 = 4, 2, 1$, d'où $A = 5, 6, 8$.

J'ajouterai que les nombres A ont déjà été rencontrés par Euler (Cf. l'article de M. Aubry, *Ens. math.*, 1912, p. 204, exerc. 24).

Bien que ces résultats se déduisent très simplement des propriétés classiques des fractions continues, j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les rappeler, d'autant plus qu'ils se rattachent au travail de M. Aubry que je viens de citer.

D. Mirimanoff (Genève).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge. 21-28 août 1912.

Programme général.

Mercredi 21 août, 9 h. du matin : Séance du Comité central.

3 h. de l'après-midi : *Séance des délégués.* Elle aura lieu dans l'une des salles du Laboratoire des ingénieurs, au siège du Congrès.

Jeudi 22 août, 10 h. du matin. *Séance d'ouverture* du 5e Congrès international des mathématiciens. Sir George Greenhill, Vice-président de la Commission, parlera des travaux de la Commission.

Vendredi 23 août, 9 h. du matin, 1re séance, en commun avec la section d'enseignement du Congrès : *Présentation des travaux des*