

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL
A
Kapitel: I. —A est une puissance nième parfaite.
Autor: Baatard, Lucien
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14281>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A¹

I. — A est une puissance n^{ième} parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{A}{(a + \alpha)^{n-1}} &= \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1} \alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 a^{n-3} + \dots + \alpha^{n-1}} \\ &= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a + \alpha)^{n-1}} , \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} R &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 a^{n-3} + \dots \\ &+ \frac{ln(n-1)(n-2) \dots (n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l+1)} \alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \dots + (n-1)\alpha^n . \end{aligned}$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a + \alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a + \alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a + \alpha)^{n-1}} \quad \left\{ r < (a + \alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a + \alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a + \alpha)^{n-1}} \quad \left\{ r < (a + \alpha)^{n-1} \right\} .$$

¹ Communication présentée à Soleure, le 1^{er} août 1911, à la Section mathématique de la 94^e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n - 1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n - 1)(a + \alpha)$ et divisant le tout par n , on obtient

$$\frac{a - (n - 1)\alpha + \varepsilon + (n - 1)(a + \alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\ 889\ 568}$

$$a + \alpha = 20 ; \quad 20^4 = 160000 ; \quad 1889568 : 160000 = 11 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{11 + 4 \cdot 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$$a + \alpha = 50 \quad 79507 : 50^2 = 31 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{31 + 2 \cdot 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$$79507 : 60^2 = 22 \text{ quot. inc. ;} \quad \frac{22 + 2 \cdot 60}{3} = 47 \text{ quot. inc. ;}$$

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$$a + \alpha = 1000 ; \quad \frac{1000 + 917}{2} = 958 \text{ quot. inc.} = \sqrt{917764}.$$

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{A}{(a - \alpha)^{n-1}} &= \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1} \alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1, 2} \alpha^2 a^{n-3} - \dots \pm a^{n-1}} \\ &= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a - \alpha)^{n-1}}, \end{aligned}$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1, 2} \alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-l)}{1, 2, 3 \dots (l+1)} \alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1) \alpha^n.$$

R' est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha) + \alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}].$$

Or

$$[(a-\alpha) + \alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1} \alpha (a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1, 2} \alpha^2 (a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n.$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1, 2} \alpha^2 (a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1, 2, 3} \alpha^3 (a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n;$$

R' est toujours positif.

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \quad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\}.$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

$$1. - \sqrt[6]{191\ 102\ 976}$$

$$a - \alpha = 20; \quad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5 \cdot 20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$$26^5 = 11\ 881\ 376; \quad 26 \text{ est plus grand que la racine cherchée.}$$

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\ 102\ 976 : 11\ 881\ 376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 \cdot 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\ 102\ 976} .$$

$$2. - \sqrt[4]{131\ 079\ 601}$$

$$a - \alpha = 100 ; \quad 131\ 079\ 601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 \cdot 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\ 079\ 601} .$$

$$3. - \sqrt[4]{4\ 613\ 904}$$

$$a - \alpha = 2000 ; \quad 4\ 613\ 904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153 .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\ 613\ 904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt[4]{4\ 613\ 904} .$$

FORMULE (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1 , donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc. ,}$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

III. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A , la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x .