

SUR L'EXISTENCE DES POTENTIELS ET DE LEURS DÉRIVÉES

Autor(en): **Jaccottet, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14862>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'EXISTENCE DES POTENTIELS ET DE LEURS DÉRIVÉES ¹

1. *Introduction.* La théorie du potentiel peut être subdivisée en deux parties qui se rattachent, l'une à la théorie des intégrales définies, l'autre à la théorie des équations aux dérivées partielles ; les potentiels sont, en effet, certaines intégrales définies multiples qui ont la propriété de satisfaire aux équations de Laplace ou de Poisson.

Dans la théorie de ces équations différentielles, la démonstration de l'existence, dans un domaine donné, de solutions soumises à certaines conditions aux limites du domaine constitue un premier pas vers la solution des problèmes d'intégration (problèmes de Dirichlet et de Neumann, par exemple). Quelque vif que soit aujourd'hui l'intérêt qui s'attache à ces questions, ce n'est pas d'elles qu'il s'agit dans cette conférence.

Si l'on se place au point de vue de la théorie des intégrales définies, les fonctions sous le signe somme, dans les intégrales qui expriment les potentiels et leurs dérivées, sont souvent infinies dans le domaine d'intégration ; on se trouve en présence d'intégrales *généralisées* (ou *impropres*) dont il s'agit d'établir la *convergence*, ou si l'on veut l'*existence*, en même temps qu'indiquer les limites dans lesquelles elles vérifient les équations différentielles mentionnées. Je voudrais passer en revue les principaux problèmes qui se présentent dans cette théorie et noter l'état actuel de leur solution, sans viser à être complet ².

2. *Définition.* Considérons l'attraction newtonienne exercée sur une masse ponctuelle M par plusieurs autres m . LAGRANGE a remarqué le premier (1773) que les composantes de l'attraction, X, Y, Z , suivant les axes d'un système de coordonnées rectangulaires, sont les dérivées partielles $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$, d'une même

¹ Conférence faite par M. Ch. JACCOTTET (Lausanne) à la réunion de la Société mathématique suisse, le 9 mars 1913, à Neuchâtel.

² Les compléments et la bibliographie du sujet seront donnés dans l'article que prépare l'auteur pour l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, édition française, tome II, vol. 4, 24.

fonction Ω des coordonnées du point P (x, y, z) , où est située la masse M. La fonction Ω a pour valeur $\Omega = \sum_{(m)} \frac{f m M}{r_m}$, la somme s'étendant à toutes les masses m , r_m désignant la distance de la masse m considérée à la masse M.

Pour exprimer l'action exercée sur une masse ponctuelle M par un corps continu K, Lagrange suppose ce corps décomposé en masses élémentaires dm et fait la somme de toutes les actions élémentaires. Les composantes de l'action totale sont encore les dérivées partielles d'une fonction $\Omega(x, y, z)$,

$$\Omega = \int_K \frac{f \cdot M \cdot dm}{r} = f \cdot M \cdot \int_K \frac{dm}{r};$$

r désigne la distance de l'élément dm au point *potentié* P (x, y, z) , siège de la masse M; f est un facteur constant dépendant du choix des unités, qui peut être pris égal à 1. Si, de plus, nous faisons $M = +1$, nous avons $\Omega = V = \int_K \frac{dm}{r}$. C'est à cette fonction V

que GREEN a donné le nom de *fonction potentielle* et GAUSS celui de *potentiel* du corps K par rapport au point potentié P. La fonction V a ainsi la signification suivante : $X = \frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial V}{\partial z}$ sont les composantes de l'attraction exercée par le corps K sur la masse +1 située en P (x, y, z) .

3. *Hypothèses physiques.* Le fait de considérer l'action totale comme la somme des actions élémentaires et d'exprimer le potentiel par une intégrale implique l'hypothèse que la matière est divisible à l'infini et que chacune des parcelles de matière, si petite soit-elle, possède la propriété d'attirer suivant la loi de Newton d'autres parcelles analogues, à toutes les distances quelque petites que soient ces distances. Or ceci paraît en contradiction avec l'hypothèse de la constitution moléculaire de la matière et l'existence des forces intra-moléculaires.

Mais il y a plus. Dans le but de pouvoir traiter commodément l'intégrale V, on fait d'autres hypothèses sur la répartition des masses à l'intérieur du corps K. On admet en général la continuité et la dérivabilité de la fonction qui mesure la masse, de manière à assurer l'existence de la *densité*. On sait que la densité en un point N du corps est la limite de la densité moyenne d'un élément de volume entourant le point N, lorsque cet élément de volume s'évanouit en ce point. La densité au point N est ainsi

$$\rho = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta K} \right) = \frac{dm}{dK}, \quad \Delta m \text{ désignant la masse contenue dans}$$

l'élément de volume dK . En introduisant dans l'intégrale V cette fonction ϱ , le potentiel prend la forme habituelle $V = \int_K \frac{\varrho dK}{r}$.

On peut se demander si, dans ces conditions, le potentiel ne perd pas sa signification physique ou si, tout au moins, V représente avec une approximation suffisante l'action réelle du corps K .

Avant d'aller plus loin, il faut remarquer que les physiciens n'ont pas les mêmes idées sur la constitution de la matière. Les avis oscillent entre ces deux conceptions extrêmes : une matière continue au sens exact du mot, et une matière formée de corpuscules très petits isolés les uns des autres, les molécules. L'opinion la plus généralement admise aujourd'hui est intermédiaire. Je rappelle seulement, à ce propos, la superbe conférence dans laquelle M. le professeur P. WEISS¹ nous montrait l'atome comme un complexe encore peu connu de particules de nature très différente, parmi lesquelles on distinguait les particules α , les électrons et les magnétons.

Les mathématiciens, comme le fait remarquer M. F. KLEIN dans son cours de Calcul différentiel et intégral avec applications à la géométrie (autogr., Leipzig 1902), n'ont pas à décider laquelle de ces hypothèses renferme la plus grande part de vérité. Leur rôle est de montrer jusqu'à quel point ces différentes hypothèses peuvent conduire aux mêmes résultats. Et c'est là, dit-il, l'un des grands problèmes de ce qu'il appelle la « mathématique des approximations. »

4. *Approximation des potentiels physiques par des intégrales définies.* C'est dans cet ordre d'idées que se place J. G. LEATHEM, dans sa brochure « Volume and Surface integrals used in physics » (Cambridge 1905). Il admet la constitution moléculaire de la matière et, exagérant volontairement son point de vue, considère un corps comme une agglomération de corpuscules extrêmement petits séparés les uns des autres par des espaces vides. Non seulement cette matière ne peut être subdivisée à l'infini, mais il existe un dernier degré de subdivision au delà duquel les parcelles de matière n'ont plus la propriété d'attirer d'après la loi de Newton. Il appelle *particules* les plus petites parcelles possédant cette propriété. Rien n'empêche de se figurer ces particules comme étant du même ordre de grandeur que les molécules. Le potentiel se présente alors sous la forme d'une somme, $\sum \frac{m}{r}$, que l'auteur veut représenter approximativement par l'intégrale $\int_K \frac{\varrho dK}{r}$. L'évaluation de cette approximation ou, si l'on veut, l'examen de la

¹ Société helvétique des sciences naturelles, session d'Altdorf 1912.

question si les deux hypothèses de la continuité et de la discontinuité de la matière conduisent approximativement au même résultat, fait l'objet du premier chapitre de la brochure.

Dans ce but, il doit tout d'abord définir la densité ρ et veut s'arranger de manière que cette fonction soit en général continue. Il introduit pour cela la notion de *petitesse physique* (physical smallness). Un corps, par exemple, sera considéré comme physiquement très petit lorsqu'il sera imperceptible à nos sens, mais non pas tel qu'il doive être considéré comme ayant les propriétés physiques d'une molécule; il doit au contraire renfermer un grand nombre de molécules. On estime qu'un gaz, à pression et température normales, renferme 4×10^{19} molécules par cm^3 . Un cube dont le côté serait égal à la longueur d'onde de la lumière de sodium, soit 6×10^{-5} cm., renfermerait encore 8,000,000 de ces molécules. Si l'on considère 8 millions comme un grand nombre, on pourrait prendre cette longueur d'onde comme spécimen de petitesse physique et désigner son ordre de grandeur par ε . La densité en un point N du corps est alors définie comme la densité moyenne d'une partie de ce corps entourant N et dont toutes les dimensions sont de l'ordre ε .

Dans cette hypothèse, Leathem cherche l'ordre de grandeur de la différence entre $\sum \frac{m}{r}$ et $\int \frac{\rho dK}{r}$ et il arrive à la conclusion que cet ordre est ε ; tandis que l'ordre de grandeur de la différence entre les composantes des attractions correspondant à ces potentiels est $\varepsilon \log \varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$. La question posée plus haut peut donc être considérée comme affirmativement résolue. Il faut cependant remarquer que la définition de la densité est quelque peu imprécise; l'auteur ne s'en défend pas; il s'adresse à des étudiants en physique et n'a pas l'intention d'entrer dans des discussions mathématiques délicates. Ainsi, il ne fait que rendre plausible la continuité qu'il attribue à la fonction ρ .

5. *Comportement des potentiels en dehors des masses attirantes.* Considérons maintenant les potentiels mathématiques exprimés par des intégrales de la forme $V = \int \frac{\rho dK}{r}$ s'étendant à certaines masses. Celles-ci peuvent être distribuées dans un volume, sur une surface ou une ligne, ou encore en des points isolés. On obtiendra, suivant les cas, des potentiels de corps, de surface, de ligne ou de points. Nous considérerons aussi les potentiels de double couche qu'il est superflu de définir ici. Si le point potentiel P se trouve à une distance finie de toute masse potentialante, la distance r ne devient jamais infiniment petite et, pourvu que la densité ρ soit une fonction intégrable, l'intégrale V existe et représente une fonction des coordonnées du point P.

POINCARÉ¹ a démontré directement que ce potentiel V est développable aux environs d'un point (a, b, c) , extérieur aux masses potentialantes, en une série entière $\sum A_{\alpha\beta\gamma} (x-a)^\alpha (y-b)^\beta (z-c)^\gamma$; cette série converge absolument dans les environs du point (a, b, c) sous la seule condition que $\int_K |\varrho| dK$ existe.

Un potentiel a, par suite, des dérivées de tous ordres, que l'on obtient en dérivant sous le signe somme. Les dérivées premières satisfont à la relation suivante: Soit s une direction donnée par ses cosinus directeurs α, β, γ ; soit $\frac{\partial}{\partial s} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}$, et désignons par X_s la composante, suivant la direction s , de l'attraction qu'exerce le corps sur la masse $+1$ située en P , on a

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial s} = \int_K \varrho \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial s} dK = X_s .$$

Les dérivées secondes satisfont à l'équation de Laplace:

$$(2) \quad \Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 .$$

Ces propriétés appartiennent à tous les potentiels mentionnés, dans l'hypothèse que le point P est à une distance finie des masses potentialantes.

Dans tout ceci la densité ϱ n'a joué qu'un rôle très effacé, elle aura sa revanche tout à l'heure. Mais auparavant, je voudrais signaler une question intéressante examinée récemment par MM. PIZETTI et LAURICELLA². Supposons que l'on donne le volume occupé par un corps et l'action externe du corps, c'est-à-dire son potentiel extérieur, quelle est la répartition des masses à l'intérieur du corps? Ainsi formulé, le problème a une infinité de solutions et on peut se demander quel est le degré d'indétermination de la densité ϱ (ϱ est supposée continue et dérivable deux fois)? Lauricella arrive à la conclusion que $\Delta\varrho$ est complètement arbitraire. En d'autres termes, $f(x, y, z)$ désignant une fonction arbitrairement choisie à l'intérieur du corps, on peut poser $\Delta\varrho = f(xyz)$; il existe alors une fonction ϱ , satisfaisant à cette équation différentielle, telle que le potentiel $\int_K \frac{\varrho dK}{r}$ soit, à l'extérieur du corps, identique au potentiel prescrit. Cette question est

¹ *Acta mathematica*, 22 (1898) p. 89.

² P. PIZETTI, *Atti della R. Acc. Lincei* (5) 18, 1^{er} sem., p. 211; *Annali di Mat.* 17 (1910), p. 225. — G. LAURICELLA, *Atti della R. Acc. Lincei* (5) 20, 1^{er} sem., p. 99.

née de l'étude de la répartition des masses à l'intérieur du géoïde, dont l'action externe est assez bien connue.

6. *Potentiel d'un corps par rapport à un point intérieur.* Quand le point P est à l'intérieur du domaine K occupé par les masses potentialantes, la distance r devient nulle dans le champ d'intégration, savoir au point P; la fonction sous le signe somme, dans les intégrales qui expriment V et ses dérivées, devient infinie en ce point. Ces intégrales, comme l'a fait remarquer GAUSS, n'ont plus de sens, à moins d'être définies à nouveau, soit généralisées. Pour cela, on entoure le point P d'une surface σ , limite d'un certain volume τ ; l'intégrale à généraliser est alors étendue au domaine $K - \tau$. Puis on modifie la surface σ de manière que toutes ses dimensions deviennent infiniment petites et qu'elle s'évanouisse au point P. Si l'intégrale étendue au domaine $K - \tau$ tend vers une limite finie lorsque σ s'évanouit en P, elle est dite *convergente*, et cette limite est prise comme valeur de l'intégrale généralisée; si, au contraire, la limite n'existe pas ou est infinie, l'intégrale est dite *divergente*; la généralisation proposée n'a pas de sens. La convergence est de deux sortes: lorsque l'existence et la valeur de la limite sont indépendantes de la succession des formes prises par la surface σ en s'évanouissant en P, l'intégrale est dite *absolument convergente*, dans le cas contraire, *semi-convergente*.

Revenons au potentiel. On démontre aisément la convergence absolue de l'intégrale V pour tous les points intérieurs, puis sa continuité, en montrant que V possède des dérivées premières. Le potentiel d'un corps est ainsi continu dans tout l'espace et y possède des dérivées premières.

Ces dérivées premières peuvent-elles être obtenues, comme dans le cas des points extérieurs, en dérivant sous le signe somme?

La réponse est affirmative. Pour le démontrer et étendre ainsi aux points intérieurs la relation (1), il faut, 1^o, non seulement établir l'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$, mais encore celle de l'intégrale X_s , puis 2^o, montrer l'égalité de ces deux limites.

GAUSS et, à sa suite, DIRICHLET et RIEMANN se contentent d'établir l'existence de X_s . On compléterait la démonstration en établissant le théorème suivant, que démontre J.-G. LEATHEM¹ dans les cas intéressant la théorie du potentiel et sous la condition que ρ soit dérivable: La dérivée d'une intégrale généralisée, au point P où la fonction à intégrer devient infinie, s'obtient en dérivant sous le signe somme, à la condition que l'intégrale primitive et celle obtenue après la dérivation soient convergentes.

La première démonstration satisfaisante de l'égalité (1) est due

¹ Loc. cit. p. 23.

à M. BOUQUET¹; elle est valable sans autre condition pour ρ que celle de l'intégrabilité.

7. *Equation de Poisson.* Considérons maintenant les dérivées secondes. POISSON remarqua le premier (1813) que l'équation de Laplace n'est plus vérifiée lorsque P appartient aux masses potentielles et qu'elle devait être remplacée par la suivante :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad \text{ou} \quad \Delta V = -4\pi\rho,$$

ρ étant la valeur de la densité au point P. Cette équation est dite *l'équation de Poisson. Etablir l'existence des dérivées secondes, puis l'équation de Poisson, est le problème capital de cette théorie.*

Ici la densité ρ est au premier plan, les progrès sont marqués par des hypothèses de moins en moins restrictives concernant cette fonction. Nous pouvons distinguer quatre périodes, suivant les hypothèses dans lesquelles l'équation de Poisson a été établie :

1 ^{re} période :	ρ constant	POISSON (1813).
2 ^{me} »	ρ dérivable (analytique)	GAUSS (1840), (E. Schmidt).
3 ^{me} »	ρ continue	HÖLDER (1882), MORERA.
4 ^{me} »	ρ intégrable	H. PÉTRINI (1899).

1^{re} période. Poisson, non seulement démontra l'équation qui porte son nom dans le cas des corps homogènes, mais il donna de ce théorème, dans le cas général, trois démonstrations différentes. Ces démonstrations doivent être aujourd'hui considérées comme insuffisantes, Poisson admettant implicitement l'existence de ΔV et se bornant à calculer la valeur de cette expression. La même observation s'adresse aux démonstrations de O. Rodrigues, Ostrogradsky, Sturm, Pagani.

2^{me} période. — C'est à GAUSS² qu'est due la première démonstration satisfaisante de l'équation de Poisson. Cet auteur admet que ρ possède des dérivées premières finies; mais, comme il le fait remarquer, sa démonstration n'exige que la dérivabilité (Gauss dit la continuité), de ρ le long de chacun des rayons vecteurs partant du point P. Gauss établit l'existence et la continuité des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, etc., à l'intérieur du corps, leur absence de signification à la surface, les discontinuités qu'elles éprouvent lorsqu'on passe de l'intérieur à l'extérieur du corps et déduit de ces résultats l'équation de Poisson. Il s'élève contre l'idée émise par Poisson, Ostrogradsky et Pagani de poser $\Delta V = 2\pi\rho$ pour les points de la surface, car ΔV n'y a pas de sens précis.

¹ Publiée par BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*; PICARD, *Traité d'Analyse*, I, p. 165.

² Une traduction française du célèbre mémoire de Gauss se trouve dans le *Journal de Liouville*, 7 (1842).

La démonstration de Gauss fut reprise et modifiée par DIRICHLET et dès lors les démonstrations du théorème de Poisson se font de plus en plus nombreuses.

Le point de vue de Gauss (ρ dérivable) est naturellement celui de presque tous les traités de la théorie du potentiel. On le retrouve même dans certains travaux modernes : E. SCHMIDT¹, suivant les traces de H. BRUNS², considère la densité ρ et le potentiel comme des fonctions analytiques et ramène la question d'existence des dérivées au théorème d'existence des solutions analytiques des équations aux dérivées partielles.

Il faut encore citer la démonstration donnée par KRONECKER dans le *Journal de Crelle* de 1869, quoique cette démonstration soit incomplète, Kronecker se voyant obligé à admettre l'existence des dérivées secondes. Pour la première fois, semble-t-il, on abandonne l'idée de ρ dérivable et propose comme idéal de soumettre ρ aux conditions les moins restrictives possibles. De plus, Kronecker fait voir que la difficulté de la démonstration provient de l'hypothèse du point matériel que l'on suppose placé au point P. Il remplace ce dernier, par exemple par une petite sphère homogène, et établit facilement, pour l'action réciproque des deux corps, un théorème correspondant à celui de Poisson. En faisant tendre la sphère vers un point matériel, il obtient le théorème de Poisson ; c'est ce passage à la limite qui est la partie difficile de la démonstration et oblige Kronecker aux restrictions indiquées.

3^{me} période. Les progrès de la théorie des fonctions vont permettre un nouvel avancement de la solution du problème. Dans sa dissertation, présentée à l'Université de Tubingue en 1882, O. HÖLDER reprend l'étude de l'existence des potentiels et de leurs dérivées en considérant la densité ρ comme *intégrable*. Mais l'étude des dérivées secondes est faite en exigeant que la fonction ρ satisfasse, dans les environs du point P (x, y, z), à la condition

$$(4) \quad |\rho(\xi, \eta, \zeta) - \rho(x, y, z)| < Ar^\lambda$$

A et λ étant deux constantes positives, $\lambda < 1$. Cela revient à considérer ρ comme continu au point P, avec encore une certaine restriction. Hölder trouve alors pour $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ l'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{R=0} \int_{(K)-(R)} \rho \cdot \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x^2} dK - \frac{4}{3} \pi \rho_0$$

dans laquelle ρ_0 est la densité au point P, (K) désigne le domaine

¹ *Mathematische Annalen*, 68 (1909) p. 107.

² Dissertation, Berlin 1871.

occupé par le corps, (R) une sphère de rayon R et de centre P. De ces résultats découle l'équation de Poisson.

Pour assurer la continuité de ces dérivées, l'auteur doit modifier un peu la condition (4) et exiger que

$$|\varphi(x', y', z') - \varphi(x'', y'', z'')| < Ar^\lambda,$$

(x', y', z') et (x'', y'', z'') étant deux points quelconques des environs de P.

Les résultats de Hölder ont été retrouvés et quelque peu étendus par G. MORERA¹, dans un travail admirable de clarté et de simplicité. Morera commence par distinguer la convergence absolue et la semi-convergence, puis montre que l'intégrale figurant dans la formule de Hölder est semi-convergente. Il obtient la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\varrho_0 \int_S \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS + \int_K (\varrho - \varrho_0) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi^2} dK,$$

dans laquelle l'intégrale de volume est absolument convergente, grâce à la présence du facteur $\varrho - \varrho_0$; S désigne la surface qui limite le corps K et $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée suivant la normale à cette surface. Les hypothèses faites sont: 1° la densité ϱ est finie au point

P, $\varrho_P = \varrho_0$; 2° ϱ est intégrable; 3° l'intégrale $\int_0^r \frac{\varrho - \varrho_0}{r} dr$ est finie

et déterminée le long de chacun des rayons vecteurs partant de P ($r = 0$). Cette dernière condition entraîne la continuité de ϱ au point P et même la restreint. En remplaçant l'intégrale absolument convergente par d'autres semi-convergentes, Morera retrouve les résultats de Hölder.

4^{me} période. La solution complète du problème de Poisson est due à Henrik PÉTRINI. Dans un mémoire très étendu, paru en 1908 dans les Acta mathematica, cet auteur rassemble et complète les résultats qu'il avait publiés dès 1899 dans divers périodiques suédois.

M. Pétrini ne soumet tout d'abord la fonction ϱ à aucune autre condition que celle de l'intégrabilité et il obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des dérivées secondes du potentiel. Il est ensuite obligé d'ajouter à la condition d'intégrabilité de ϱ , celle de continuité le long de chacun des rayons vecteurs partant du point P: si au lieu de coordonnées rectangulaires, on introduit des coordonnées polaires r, θ, ψ et

¹ *Rendiconti d. Istituto Lombardo* (2) 20 (1887), p. 302, 543.

pose $r = ht$, $u = \cos \theta$, la densité ϱ doit être telle que $\lim_{h=0} \varrho(ht, \theta, \psi)$ existe et soit égale à une fonction $\varrho(u, \psi)$ intégrable le long de chacun des rayons vecteurs issus de P. La condition nécessaire et suffisante de l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ par exemple, est alors la convergence pour $h = 0$ de l'intégrale

$$(5) \quad K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \cdot \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x^2} dK,$$

dans laquelle (h) et (a) sont des sphères de centre P et de rayons h et a , a étant une constante.

L'existence des dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ une fois assurée, ΔV se présente sous la forme d'une intégrale de surface qui devient égale à $-4\pi\varrho$ lorsqu'on suppose ϱ continue au point P. L'équation de Poisson, $\Delta V = -4\pi\varrho$, est ainsi établie dans le cas où ϱ est continue et sous condition de convergence de trois intégrales analogues à (5). En spécialisant, Pétrini retrouve les résultats de Morera, Hölder et Gauss.

La continuité de ϱ ne suffit pas à assurer l'existence des dérivées secondes. M. Pétrini donne comme exemple d'une densité continue dans tout l'espace et pour laquelle les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, etc., n'existent pas au point P (x, y, z) , la fonction

$$(6) \quad \varrho = \frac{(\xi - x)^2}{r^2 \log \frac{1}{r}}, \quad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Le laplacien ΔV du potentiel correspondant n'existe pas non plus et l'équation de Poisson est en défaut. Mais si l'on généralise cette équation en définissant ΔV comme suit :

$$(7) \quad \overline{\Delta V} = \lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0 \\ h_3=0}} \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial V(x + h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial V(x, y + h_2, z)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \right) + \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial V(x, y, z + h_3)}{\partial z} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \right) \right].$$

les quantités h_1, h_2, h_3 tendant vers zéro de manière que

$$\lim \left(\frac{h_i}{h_k} \right) = c_{ik} = \text{constante} \neq 0, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

alors, on a la relation

$$\overline{\Delta V} = -4\pi\rho .$$

Ce fait se présente chaque fois quand la densité ρ est continue, alors même que les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'existeraient pas isolément.

Dans le cas général, où ρ est soumis aux deux seules conditions d'intégrabilité et de continuité le long des rayons issus de P, l'expression $\overline{\Delta V}$, (7), existe toujours, mais on a l'équation de Poisson généralisée

$$(8) \quad \overline{\Delta V} = -4\pi\rho + \theta ,$$

θ représentant une fonction dont l'intégrale est nulle dans n'importe quelle partie du domaine d'intégration; cette fonction θ dépend de la formation de l'expression $\overline{\Delta V}$, c'est-à-dire des constantes c_{ik} . Réciproquement l'équation $\overline{\Delta V} = -4\pi\rho$ n'a en général pas de solution. Mais il existe une et une seule fonction θ à intégrale nulle, telle que l'équation de Poisson généralisée (8) ait une solution, savoir $V = \int_{\kappa} \frac{\rho dk}{r} + U$, U désignant une fonction harmonique quelconque.

En résumé, dans le cas général, avec les deux conditions imposées à ρ , les dérivées secondes satisfont à l'équation de Poisson généralisée, (8). Lorsque, de plus, ρ est continue sans restriction, on est certain d'avoir la relation $\overline{\Delta V} = -4\pi\rho$, mais non encore l'équation de Poisson ordinaire. Pour être assuré de l'existence de cette dernière, il faut restreindre la continuité par l'adjonction d'une condition analogue à celles de Hölder ou de Morera.

8. *Dérivées secondes dans des directions quelconques.* Pétrini fait une étude complète des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$. Considérons deux éléments rectilignes, ds_1 et ds_2 , partant du point P et allant dans des directions déterminées; désignons par P_1 et P_2 leurs extrémités. Nous savons que $\frac{\partial V}{\partial s_1}$ existe toujours. Pétrini définit

$$(9) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \lim_{ds_2=0} \left\{ \frac{1}{ds_2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s_1} \right)_{P_2} - \left(\frac{\partial V}{\partial s_1} \right)_P \right] \right\}$$

et cherche les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de cette limite. En général, les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$ sont différentes, l'auteur établit les conditions de leur égalité. Puis il

s'occupe de la continuité de ces dérivées quand la densité est continue.

Le comportement de ces dérivées dans le voisinage de la surface d'un corps est examiné tout d'abord dans le cas typique de deux corps homogènes, de densités différentes ρ_1 et ρ_2 , en contact suivant une surface Σ . Le cas, plus général, de densités continues dans les deux corps se ramène, sous certaines conditions, au précédent et conduit alors aux mêmes résultats.

Nous avons vu que Gauss n'attribuait aucun sens aux dérivées secondes en un point de la surface Σ . Au contraire, les dérivées dans les directions ds_1 et ds_2 , définies par la formule (9), ont souvent une valeur parfaitement déterminée en un tel point P_0 . La nature de la surface aux environs de ce point a sur cette détermination une certaine influence. M. Pétrini établit les conditions d'existence de $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ lorsque le point P_0 est régulier, comme aussi lorsqu'il est conique ou de rebroussement. En un point conique, la dérivée est en général infinie, sauf dans certaines directions déterminées pour lesquelles elle est toujours finie. En un point de rebroussement, la dérivée peut exister dans toutes les directions.

Pour établir la discontinuité lorsqu'on traverse la surface Σ au point P_0 , on doit considérer la limite de la dérivée au point P lorsque ce point s'approche du point P_0 en suivant un certain chemin. Cette limite dépend en général du chemin suivi. Cependant, dans le cas de deux corps homogènes séparés par la surface Σ , supposée régulière en P_0 , si le chemin est entièrement situé dans l'un des corps et n'est pas tangent à la surface de séparation en P_0 , la limite existe et ne dépend pas du chemin parcouru; elle ne dépend que du corps dans lequel s'est effectué le rapprochement. Nous avons alors trois quantités à considérer :

$$1^\circ \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \text{ en } P_0 ;$$

$$2^\circ \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_P, \quad \text{pour un déplacement dans le corps de densité } \rho_1 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_1$$

$$3^\circ \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_P, \quad \text{pour un déplacement dans le corps de densité } \rho_2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_2$$

Les limites 2° et 3° sont en général différentes, leur différence D est la *discontinuité* de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ quand on traverse la surface; on trouve $D = 4\pi(\rho_1 - \rho_2)\mu_1\mu_2$, μ_1 et μ_2 sont les cosinus des angles que font les directions ds_1 , ds_2 avec la normale à la surface en P_0 . La valeur 1° est égale à la valeur 2° ou à la valeur 3° suivant que

l'élément ds_1 est situé dans le corps de densité ρ_1 , ou dans l'autre. En d'autres termes, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ s'approche de sa valeur en P_0 lorsque le chemin est situé dans le corps qui renferme l'élément ds_1 .

9. *Potentiels de simple couche.* Les questions d'existence concernant ces potentiels sont analogues à celles examinées à propos des potentiels de corps et l'évolution des deux théories s'est faite à peu près parallèlement.

La surface S qui porte la couche attirante doit être une surface à deux côtés que nous distinguons par les indices 1) et 2). Le potentiel $V = \int_S \frac{\sigma dS}{r}$, dans lequel σ désigne la densité superficielle ($\sigma = \frac{dm}{dS}$), est, en général, une intégrale absolument convergente en tout point de la surface S et qui représente une fonction continue dans tout l'espace, même lorsqu'on franchit la surface.

Dérivées premières. La relation $\frac{\partial V}{\partial s} = X_s = \int_S \sigma \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial s} dS$, valable en tout point de l'espace non situé sur S , n'a plus de sens en un point P_0 de cette surface, l'intégrale du second membre étant semi-convergente.

On définit $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point P_0 de S comme nous avons défini, dans le numéro précédent, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ en un point de Σ . Nous aurons aussi à considérer la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point P , lorsque ce point P s'approche de P_0 . L'existence de ces deux valeurs dépend, 1°, de la nature de la surface S aux environs du point P_0 ; 2°, du comportement de σ sur cette portion de surface; 3°, la seconde limite dépend en plus du chemin qu'a suivi P .

Dans certains cas, en particulier lorsque la surface possède un plan tangent déterminé en P_0 et que σ est continue en ce point, la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$, quand le chemin ne touche, ni ne traverse la surface, ne dépend que du côté de la surface S auquel aboutit le point P lorsqu'il arrive en P_0 . Comme dans le numéro précédent, on a, dans ce cas, 3 valeurs à distinguer : $\frac{\partial V}{\partial s}$ en P_0 , $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_1$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_2$. La différence entre ces deux dernières est la discontinuité lorsqu'on franchit la surface en P_0 .

Dans la première période de recherches, on considéra des surfaces analytiques régulières et une densité σ dérivable autant de fois que cela était utile. Les dérivées normales attirent d'abord l'attention. COULOMB (1788) avait déjà remarqué leur discontinuité

sous la forme suivante : l'attraction d'une couche infiniment mince sur deux points matériels situés de part et d'autre de la couche est différente ; quand l'une des composantes normales est nulle, l'autre est égale à 4π fois la densité au point correspondant de la couche. POISSON (1811) après avoir indiqué que la somme des composantes normales est égale à $4\pi\sigma$ et que les composantes tangentielles sont continues, énonce la loi de discontinuité d'une composante quelconque ; il communique, en l'étendant au cas général, une démonstration donnée par LAPLACE pour le cas particulier d'une surface attirante de niveau et basée sur des considérations physiques. La première démonstration analytique est due à CAUCHY (1815). GREEN (1828) énonça le premier le théorème sous sa forme actuelle en considérant le potentiel au lieu des attractions ; il déduit cette loi à l'aide de sa formule de transformation des intégrales multiples.

C'est à GAUSS (1840) qu'est due la première analyse rigoureuse de la question. Mettant en évidence les hypothèses concernant la surface S (existence d'un plan tangent, courbure finie, infinie sous certaines conditions) Gauss montre que l'équation $\frac{\partial V}{\partial s} = X_s$ n'a plus de sens en un point de la surface. Il établit, pour le cas d'une densité dérivable, l'existence des limites $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_2$ et calcule la discontinuité de $\frac{\partial V}{\partial s}$.

HÖLDER (1882) impose à la densité superficielle σ la condition (4) qu'il avait imposée à la densité d'un corps. Il représente la surface par les équations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ et prescrit aux six dérivées premières de ces fonctions une condition de continuité analogue :

$$|x'(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - x'(u_0, v_0)| < A \cdot l^\mu, \quad l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

A et μ sont des constantes positives, $\mu < 1$; il a aussi une condition spéciale pour le bord de la surface. Dans ces hypothèses, il établit la loi des discontinuités de $\frac{\partial V}{\partial s}$, puis le comportement de cette dérivée dans les environs du bord de la surface : $\frac{\partial V}{\partial s}$ devient infinie logarithmiquement quand P s'approche indéfiniment de ce bord, et il donne une expression asymptotique de $\frac{\partial V}{\partial s}$.

WEINGARTEN¹, MORERA², LIAPOUNOFF³ et d'autres apportent encore certaines simplifications ou contributions. Mais ici aussi, c'est H. PÉTRINI qui, dans les mémoires déjà cités, parvient à élucider

¹ *Acta mathematica*, 10 (1887), p. 303.

² *Loc. cit.*, p. 543.

³ *Journal de Math.* (6), 4 (1898), p. 241.

définitivement un grand nombre de questions. Il libère la surface S de l'obligation de posséder un plan tangent en utilisant les surfaces qu'il appelle *physiquement régulières*. Une surface est dite physiquement régulière au point P_0 , lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1° Il doit exister une ligne à tangentes déterminées ne coupant la surface qu'en P_0 et dont tous les points, non situés dans les environs de P_0 , sont à une distance finie des autres points de la surface.

2° Il doit exister un plan π passant par P_0 , tel que toutes les normales au plan, menées par les points de π situés dans les environs de P_0 , ne rencontrent la surface qu'en un nombre fini de points.

Un cylindre de révolution, dont l'axe passe par P_0 et est normal au plan π , détache de la surface S une portion S' . On peut se borner à considérer le potentiel de cette portion S' , $V' = \int_{S'} \frac{\sigma dS}{r}$.

3° Le plan π doit pouvoir être choisi de façon que V' puisse se mettre sous la forme $\int_{\omega'} \frac{\delta d\omega}{r}$, où $d\omega$ est la projection de l'élément dS , ω' la projection de S' , sur le plan π , δ ne devant jamais devenir infini ou indéterminé.

Le plan π rend le même service qu'aux autres auteurs le plan tangent.

Des résultats obtenus par Pétrini, nous ne citons, comme exemple, que le suivant :

Lorsqu'en un point P_0 de S la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe, la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$, quand P s'approche de P_0 par un chemin non tangent à la surface en P_0 , existe aussi. Cette limite est égale à la valeur de $\frac{\partial V}{\partial s}$ en P_0 dans les deux cas suivants :

1° Si la dérivée est prise dans la direction de la tangente en P_0 au chemin suivi par le point P ;

2° Si la fonction σ est continue en P_0 et si la surface y a un plan tangent déterminé.

Dérivées secondes. GREEN détermina, déjà en 1828, la discontinuité de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ lorsque la surface qui porte la couche est en même temps surface de niveau. P. PACI étendit les résultats de Green au cas d'une distribution superficielle générale. Le comportement des autres dérivées secondes, trouvé par Carl NEUMANN, fut justifié par BELTRAMI et HORN, puis récemment par POINCARÉ¹, KORN² et T. J. l'A. BROMWICH³.

¹ Théorie du Potentiel newtonien, Paris 1899, p. 232.

² Lehrbuch der Potentialtheorie I, Berlin 1899, p. 49.

³ Arkiv der Math. u. Physik (3) 2 (1902), p. 295.

H. Pétrini, dans son grand travail des *Acta mathematica*, reprend l'étude de ces dérivées en lui donnant l'ampleur avec laquelle il avait traité les autres questions. En particulierisant ses résultats, il retrouve ceux de Poincaré.

Dérivées troisièmes. Je ne connais aucun travail s'occupant des dérivées troisièmes des potentiels de corps.

Celles des potentiels de surface — dans le cas où la surface attirante est en même temps surface de niveau — ont été considérées par P. PACI¹, mais cet auteur considère sa méthode comme ne pouvant pas s'appliquer au cas général.

Tout, ou à peu près, reste à faire dans ce domaine.

10. *Potentiels de ligne.* L'étude de ces potentiels est relativement peu avancée. Quant aux hypothèses faites, soit sur la nature des lignes, soit sur la densité, on en est encore au point de vue de Gauss.

On sait depuis longtemps qu'un tel potentiel devient infini lorsque le point potentié s'approche indéfiniment de la ligne attirante. POINCARÉ², dans l'hypothèse d'une densité et d'une ligne analytiques, donna du potentiel V de cette ligne une expression asymptotique $V^{(a)}$, telle que $V - V^{(a)}$ est holomorphe dans les environs de la ligne attirante. Il trouva $V^{(a)} = U \log R$, où U et R sont aussi des fonctions holomorphes des coordonnées du point potentié P . Il semble que ces résultats aient échappé à plusieurs auteurs : LEVI-CIVITA³ et VITERBI⁴ obtiennent plus tard des expressions asymptotiques moins parfaites, mais plus maniables et établies dans des conditions un peu plus générales; A. TONOLO⁵, voulant perfectionner leurs résultats et s'inspirant du travail déjà cité de E. Schmidt, retrouve tout récemment les résultats de Poincaré par une méthode complètement différente. Prenant comme point de départ les expressions de Levi-Civita et de Viterbi, M. OLIVO⁶ établit des expressions asymptotiques soit des potentiels de simple et de double couche dans les environs de la surface attirante et de son bord, soit des potentiels de corps dans le voisinage d'un point régulier ou singulier de la surface.

11. *Potentiels de double couche.* Ces potentiels s'expriment par des dérivées premières de potentiels de simple couche et l'étude de leur dérivées premières se ramène à celles des dérivées secondes des potentiels de simple couche (voir POINCARÉ, Potentiel newtonien, p. 218). Les problèmes sont donc analogues à ceux que nous avons déjà examinés.

¹ *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 8 (1894), p. 33.

² *Acta mathematica*, 22 (1898), Théorème 9.

³ *Atti della R. Acc. Lincei (Rendiconti)*, (5) 17, 2^{me} sem., (1908), p. 3. 413, 535.

⁴ *Rendiconti Istituto Lombardo* (2) 42 (1909), p. 913.

⁵ *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 78.

⁶ *Atti Istituto Veneto*, 69 (1909-10), p. 519-546.

Remarquons que, contre toute attente, les dérivées premières normales des potentiels de double couche sont en général continues ; cette propriété, due à HELMHOLTZ, a été démontrée dans des cas très généraux par LIAPOUNOFF¹ ; elle est aussi l'objet d'une étude approfondie de H. PÉTRINI. Quant aux dérivées secondes, leurs discontinuités sont établies par A. KORN², dans des cas assez étendus.

12. *Potentiels de masses non dérivables.* Indiquons encore une extension de la notion de potentiel due à J. PLEMELJ³.

Admettre l'existence d'une densité, c'est restreindre beaucoup le mode de répartition des masses attirantes et particulariser d'une façon peut-être excessive la notion de potentiel. On peut très bien concevoir une répartition de masses n'admettant pas de densité et M. Plemelj en revient à exprimer les potentiels correspondants sous la forme de Lagrange $\int \frac{dm}{r}$; seulement cette intégrale doit être prise dans un sens analogue à celui donné par STIELTJES⁴ aux intégrales de fonctions d'une variable.

Il s'agira donc, après avoir étendu aux intégrales multiples la notion d'intégrales de Stieltjes⁵, d'aborder l'étude de ces potentiels très généraux dont les propriétés seront assez différentes de celles des potentiels classiques. En particulier, il ne faudra plus compter sur l'existence de leurs dérivées en des points appartenant aux masses potentialantes. Aussi M. Plemelj développe-t-il une notion destinée à remplacer, pour les potentiels de simple et de double couche, les dérivées normales en un point de la surface attirante.

Cette notion permettra une extension des formules de Green et les nouveaux potentiels deviendront des instruments beaucoup plus puissants que les anciens, à l'aide desquels il sera possible de résoudre les problèmes aux limites dans des cas plus généraux que jusqu'ici.

Il semblait intéressant de terminer cette revue en signalant une innovation qui fait prévoir de prochaines découvertes dans la théorie du potentiel.

C. JACCOTTET (Lausanne).

¹ *Journal de mathématiques* (6) 4 (1898), p. 241.

² *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Berlin 1899, I, p. 51.

³ *Preisschriften der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft*, 40, 1911.

⁴ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1) 8 (1894), n° 10.

⁵ Cette extension a été donnée par M. FRÉCHET, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4), 10 (1910), p. 241-256.